ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

Núm. 31.3 (2013): 135-154
ISSN (papel): 0212-4521 / ISSN (en linea): 2174-6486

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA A TRAVÉS DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF A NUMERICAL SERIES THROUGH PIRIE AND KIEREN MODEL

Myriam Codes Valcare
Universidad Pontificia de Salamanca
mcodesva@upsa.es

María Laura Delgado Martín, María Teresa González Astudillo, María Consuelo Monterrubio Pérez
Universidad de Salamanca
laura@usal.es, maite@usal.es, chelomonterrubio@usal.es

RESUMEN: Diversas investigaciones han dado cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes para la adquisición y comprensión del concepto de *serie numérica*. Los conceptos de límite e infinito, así como la diferenciación entre la serie y la sucesión de sumas parciales, son algunos de los obstáculos que han de superar. En este artículo, se analiza el proceso que sigue un grupo de estudiantes cuando resuelve una actividad sobre el cálculo de la altura y el volumen de una torre que involucra el trabajo con series armónicas mediante el modelo de Pirie y Kieren. Comenzando desde el nivel *Image Making*, los alumnos realizan conexiones entre diferentes elementos matemáticos del concepto de serie numérica. Las interacciones entre ellos les permiten avanzar entre los diferentes niveles del modelo para lograr la comprensión del concepto recurriendo al mecanismo de *folding back*.

PALABRAS CLAVE: comprensión, series numéricas, modelo de Pirie y Kieren, aprendizaje colaborativo.

ABSTRACT: Several research studies have realized the difficulties faced by students for the acquisition and understanding of the concept of numerical series. The concepts of limits, infinity and the difference between the series and the sequence of partial sums are some obstacles to be overcome. This article analyzes the process that follows a group of students solving the activity about the calculi of the height and volume of a tower that involves working with harmonic series in the light of Pirie and Kieren model. Starting from Image Making level the students link different elements of the mathematical concept of numerical series. The interactions between them allow to advance between the different levels of the model to develop an understanding of the concept using the folding back mechanism.

KEYWORDS: understanding, numerical series, Pirie and Kieren model, collaborative learning.

Fecha de recepción: junio 2012 • Aceptado: marzo 2013

Codes, M., Delgado, M.L., González Astudillo, M.T. y Monterrubio, M.C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren, *Enseñanza de las Ciencias* 31 (3), pp. 135-154

INTRODUCCIÓN

El concepto de *serie numérica* es una herramienta clave para el desarrollo de otros conceptos propios de la matemática superior como el de integral impropia, aproximación o desarrollos trigonométricos y en series de potencias, por nombrar algunos. Además, su relación con otros conceptos como el de función, límite o infinito le confiere un interés especial (Codes, 2010).

A lo largo de la historia, los tópicos de sucesiones y series numéricas han sido objeto de controversia por acarrear consigo conceptos tan complejos como el de límite y el de infinito. Algunos investigadores han desarrollado propuestas didácticas que favorecen el paso de una concepción proceso de serie a una concepción objeto (Kidron, Zehavi, y Openhaim, 2001; Kidron, 2002); esta concepción se manifiesta cuando un estudiante considera una suma infinita como un límite.

Bagni (2005), analizando la reacción de los estudiantes ante la serie de Grandi, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, observó que algunos razonamientos eran similares a los que se han realizado en épocas anteriores, y comprobó que los estudiantes tienen problemas con esta serie cuando consideran una suma infinita como una operación aritmética. Para Bagni, desde el punto de vista epistemológico, el punto clave es el paso de lo finito a lo infinito, cuyo principal problema es cultural.

Si se presta atención a la definición de serie numérica, emerge el otro concepto sobre el que se construye este tópico: la sucesión de sumas parciales. Según Codes (2010), para la construcción del esquema de convergencia de serie numérica es necesario coordinar los esquemas de sucesión de sumas parciales y de límite de una sucesión. La dificultad para coordinar estos esquemas, unida a la dificultad intrínseca de cada uno de ellos, constituye uno de los hitos que han de superar los estudiantes cuando se enfrentan al tópico de serie numérica. Codes (2010) destaca la presencia de dos elementos matemáticos que es necesario coordinar para construir el concepto de sucesión de sumas parciales, las sucesiones a_n y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Otras investigaciones se han centrado en analizar el currículo de libros de texto, los programas escolares y la práctica docente en relación con las series infinitas (González-Martín, 2010; González-Martín, Nardi y Biza, 2011).

Para profundizar en nuestro conocimiento sobre la comprensión de los alumnos del concepto matemático de serie numérica, nos planteamos como pregunta de investigación la siguiente: ¿es posible caracterizar estos procesos mediante el modelo de Pirie y Kieren? Esta investigación introduce una nueva perspectiva en la que se recurre a este modelo teórico siendo el objetivo principal analizar los procesos que siguen los alumnos cuando trabajan con series numéricas.

MARCO TEÓRICO

El modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) se ha mostrado eficiente para describir y analizar cómo se produce el crecimiento de la comprensión matemática en diferentes situaciones. Martin y Pirie (2003) describen el crecimiento de la comprensión matemática de dos estudiantes cuando utilizan un programa informático para explorar las características de las ecuaciones de segundo grado, y consideran que las conclusiones son igualmente válidas si se trabaja con calculadoras gráficas. Por su parte, Manu (2005) estudia el crecimiento de la comprensión del tópico de búsqueda de regularidades o patrones matemáticos en un contexto bilingüe, con estudiantes de islas del sur del Pacífico y su idioma indígena. En la misma línea, Kyriakides (2010) realiza un estudio de un caso para analizar el papel del lenguaje habitual en el crecimiento de la comprensión del concepto de multiplicación de fracciones, y Walter y Gibbons (2010) analizan cómo los estudiantes resuelven problemas utilizando la serie de Taylor. En la investigación de Martin (2008), se elabora la teoría de Pirie y Kieren haciendo una revisión de estudios previos sobre el crecimiento de la comprensión de diferentes conceptos: el área de un segmento circular, la derivada de una función y el uso de una nueva definición de distancia: *taxi-cab geometry*.

Para Pirie (1988), la comprensión es un proceso dinámico completo que constituye un todo, no se trata de una simple combinación lineal de categorías de conocimiento. Este modelo identifica diferentes niveles que se representan de forma anidada (Martin, 2008) para destacar que cuando un individuo pasa a un nivel superior, mantiene lo que caracterizaba a los niveles inferiores que ha superado. Además, el crecimiento de la comprensión no tiene lugar de forma lineal ni unidireccional. Estos niveles son: *Primitive Knowing* (PK), *Image-Making* (IM), *Image-Having* (IH), *Property Noticing* (PN), *Formalising* (F), *Observing* (O), *Structuring* (S), *Inventising* (I) (figura 1).

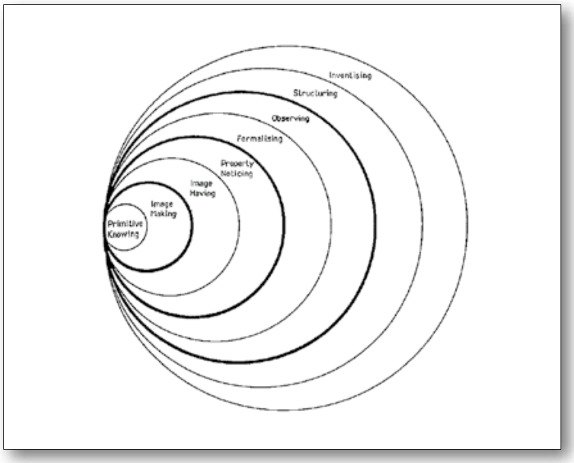


Fig. 1. Niveles del modelo de Pirie y Kieren (Pirie y Kieren, 1994: 167)

Es conveniente precisar que «el diagrama anterior es solo una aproximación gráfica al modelo en dos dimensiones con objeto de representarlo. No es el modelo en sí mismo, tiene muchos inconvenientes, pero teniendo esto en mente el diagrama es una herramienta útil» (Pirie y Kieren, 1994: 67).

Primitive Knowing (PK) es el punto de partida del proceso de crecimiento de la comprensión, aunque no implica un bajo nivel de matemáticas. El conocimiento primitivo está formado por todo lo que el estudiante sabe y puede hacer excepto el conocimiento sobre el tópico considerado. En cambio, lo que el estudiante ya sabe sobre el tópico objeto de estudio forma parte del resto de niveles del modelo. Es preciso tener en cuenta que nunca se puede saber exactamente cuál es el conocimiento primitivo de un alumno y solo se pueden hacer suposiciones sobre lo que el estudiante ya conoce (Pirie y Kieren, 1994).

Cuando el estudiante precisa de actividades concretas para representar de algún modo el tópico matemático objeto de estudio, se encuentra en el nivel de *Image Making* (IM). Si es capaz de utilizar una construcción mental sobre el tópico sin necesidad de realizar actividades concretas o trabajar con ejemplos particulares, el alumno se encontrará en el nivel de *Image Having* (IH). El nivel *Property Noticing* (PN) se alcanza cuando el estudiante trabaja con las imágenes que ya posee y es capaz de reflexionar buscando propiedades y tratando de generalizarlas. Se llega al nivel de *Formalising* (F) cuando se tiene la capacidad de pensar sobre las propiedades ya generalizadas y trabajar con el concepto como objeto formal, sin hacer referencia a una acción o imagen particular. Cuando el estudiante está en condiciones de reflexionar sobre un enunciado formal estableciendo conexiones entre conceptos para deducir patrones y regularidades que le permitan definir algoritmos y teoremas, se dice que se encuentra en el nivel de *Observing* (O). *Structuring* (S) es el nivel en el que los estudiantes comienzan a pensar en sus observaciones como una teoría y recurren a argumentaciones lógicas para realizar demostraciones (Walter y Gibbons, 2010). Finalmente, *Inventising* (I) constituye el nivel de comprensión superior del modelo, de modo que cuando una estudiante lo haya alcanzado estará en condiciones de desvincularse de situaciones concretas y determinadas pudiendo abordar otras cuestiones desde una perspectiva superior que le llevarán a comprender, inventar y realizar hipótesis sobre nuevos problemas (Pirie y Kieren, 1994).

Para que se produzca un cambio en la comprensión de un concepto, debe producirse un mecanismo que se conoce bajo el término de *folding back*, que consiste en moverse adelante y atrás al enfrentarse a actividades desde diferentes niveles de comprensión (Pirie y Kieren, 1992). Si de esta forma se crea un nuevo conocimiento o se modifica uno existente, se dice que el *folding back* ha sido efectivo. Este mecanismo pone de manifiesto que la construcción del conocimiento es de naturaleza cambiante, no lineal ni unidireccional y que, para que se produzca un crecimiento en la comprensión, los individuos recurren a concepciones (o modos de conocer un concepto) más sencillas desde el punto de vista matemático. Cuando un estudiante necesita realizar un *folding back* a un nivel inferior, al regresar al nivel superior en el que estaba no vuelve al mismo punto sino que, dentro de ese mismo nivel, se ha producido un avance en la comprensión del concepto. Esto significa que, aunque los estudiantes retomen la actividad de la que partieron, lo hacen siendo más conscientes del contenido que subyace en ella (Martin, 2008).

Dependiendo de la formación que los alumnos hayan recibido en cursos anteriores, de los conocimientos previos, del entorno de aprendizaje y sus actitudes matemáticas y hacia las matemáticas (Gómez-Chacón, 2000), estos avanzarán más o menos en la construcción de su conocimiento en una sesión de trabajo en el aula. Los estudiantes con un rendimiento medio y con ciertas dificultades manipulativas heredadas de su formación previa no siempre logran alcanzar los niveles superiores del modelo de Pirie y Kieren, aunque también depende del tipo de tarea matemática y de la complejidad de pensamiento que se requiera en ella.

METODOLOGÍA

En esta investigación, se analizan los procesos de construcción de unos alumnos para alcanzar la comprensión del concepto de serie numérica. Durante las clases teóricas, se habían explicado previamente diversos aspectos relativos a este concepto como los criterios de convergencia de series. Concretamente, se demostraron los criterios de la integral, del cociente y de comparación mientras que otros criterios, como el del logaritmo o el del resto, solo fueron enunciados. En relación con las series armónicas, se estudió su convergencia aplicando el criterio integral.

La secuencia didáctica fue diseñada íntegramente para lograr que los alumnos adquirieran una comprensión del concepto de serie. Para resolver las actividades, los alumnos disponían de apuntes teóricos correspondientes a las clases previas. La profesora forma parte del equipo de investigación del presente trabajo y, aunque en el aula asumió principalmente el papel de profesora, anotó observaciones relativas al modo en el que trabajaban los alumnos.

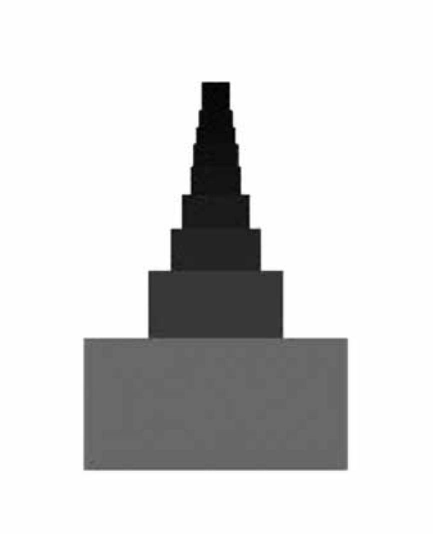
Esta experiencia se llevó a cabo con un grupo de alumnos universitarios de primer curso de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas de la Escuela de Informática de una universidad privada de España, matriculados por primera vez en la asignatura de Fundamentos Matemáticos I.

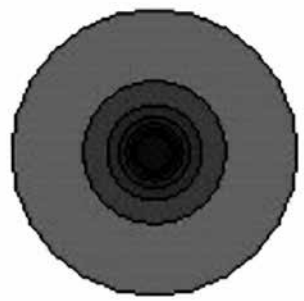
En este artículo solo se realiza el análisis de las producciones de uno de los grupos de tres alumnos, mientras están resolviendo una de las actividades propuestas en una sesión de aula de 50 minutos, sin entrar a analizar el papel de la profesora. Esta actividad se resuelve durante una sesión de clase habitual, por lo que las intervenciones de la profesora no solo se refieren a este grupo, sino al resto de los grupos y, en algunas ocasiones, se dirige a todos los alumnos; no se trata por tanto de un estudio clínico sino de lo que ocurre de forma espontánea en un aula.

La selección del grupo se realizó teniendo en cuenta las intervenciones de sus integrantes que mantuvieron una actitud dialogante entre ellos en todo momento, trabajando en equipo en contraposición con otros grupos en los que los alumnos resolvieron individualmente la tarea con escasas intervenciones verbales. Los integrantes del grupo, Manuel, Ricardo y Carlos, aceptaron voluntariamente participar en esta experiencia. Este trabajo en grupo les dio oportunidades de leer, interpretar, discutir ideas y argumentar tratando de convencer a sus compañeros de sus argumentos y sugerencias, registrando el acuerdo final en un documento escrito.

En esta actividad, había que obtener la altura final y el volumen final de una torre formada por cilindros de altura igual al radio de la base y su enunciado literal era el siguiente:

Se quiere construir una torre formada por cilindros de altura igual al radio de la base. El radio de la base es inversamente proporcional a la posición del cilindro en la torre, de modo que el radio del primer cilindro es 1, el del segundo es $\frac{1}{2}$, el del tercero $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente. Si no hay restricciones en el número de piezas para construir la torre, ¿cuál es la altura y el volumen final de la torre? Deja los resultados indicados.





Figs. 2a y 2b. Dos vistas de la torre incluidas en el enunciado

Esta actividad se propone para afianzar dos aspectos del tópico serie numérica (Codes, 2010):

- una serie numérica es un límite que puede ser convergente o no;
- una suma infinita no tiene las mismas propiedades que una suma finita.

Para resolver el problema, los alumnos debían, en primer lugar, modelizar el volumen y la altura de la hipotética torre mediante dos series armónicas para, posteriormente, utilizar los criterios estudiados en clase y concluir sobre el carácter de las dos series, una convergente y otra divergente. Mientras que la serie correspondiente a las alturas diverge, la del volumen es una serie convergente. La serie que modela la altura final de la torre es una serie armónica divergente,

$$\sum \frac{1}{n}$$

y la que modela el volumen final de la torre es una serie armónica convergente,

$$\sum \frac{\pi}{n^3}$$

Esto está relacionado con el obstáculo epistemológico relativo a la heterogeneidad de las dimensiones: los alumnos atribuyen a un volumen propiedades de su altura; si esta es infinita, piensan que el volumen también debería serlo (González-Martín y Camacho, 2004).

Las intervenciones de los alumnos fueron filmadas, lo que permitió obtener los datos en formato digital para ser analizados posteriormente. Se realizó la transcripción de las grabaciones, material que se completó con los documentos escritos producidos por los alumnos. La transcripción fue organizada en una tabla en la que se identificaba el instante de cada intervención, el interlocutor que intervenía en ese instante, el contenido de la intervención y dos casillas más vacías para que los investigadores identificaran aquel aspecto del concepto de serie numérica que se estaba construyendo en ese momento, junto con el nivel de compresión del concepto que se le asignaba según su descripción en el modelo de Pirie y Kieren.

Después de un visionado de la grabación, junto con la lectura detallada de la transcripción para obtener una visión global del trabajo realizado por los alumnos, la sesión fue dividida en cuatro bloques sucesivos manteniendo la secuencia temporal de las intervenciones de los alumnos. Estos bloques se corresponden con lo siguiente: la construcción de una imagen de la torre, la obtención de la serie correspondiente a su altura, la obtención de la serie correspondiente a su volumen y el estudio de la convergencia de ambas series. Dentro de cada uno de esos bloques, se identificaron los episodios correspondientes al trabajo en uno de los niveles de comprensión del modelo de Pirie y Kieren, lo que permitió determinar aquellos instantes en los que se producía un *folding back* que permitía un crecimiento en esta comprensión. Todo ello contribuyó a identificar, mostrar y trazar el recorrido que realizaron los alumnos hasta resolver la tarea propuesta.

RESULTADOS

Para organizar y describir mejor el trabajo realizado por los estudiantes, se va a dividir este epígrafe en cuatro partes según los bloques descritos anteriormente.

Construcción de la imagen de la torre

Los alumnos comienzan leyendo en voz alta el enunciado del problema y realizando un dibujo y/o esquema que les permite obtener una representación de la situación descrita en el enunciado. Esta actividad, que les ayuda a crearse una imagen de cómo está formada la torre, se corresponde con el nivel *Image Making* en la comprensión del nuevo conocimiento:

Ricardo: (Lee). —Se quiere construir una torre formada por cilindros…
Manuel: —Vamos a ir cogiendo cosas.
Ricardo: —…de altura al radio de la base. Es decir, la altura…
Carlos: —Inversamente proporcional a…
Ricardo: —…la altura del cilindro…
Manuel: —La altura siempre va a ser igual al radio.
Ricardo: —Igual al radio. (Alguno dice algo de dibujarlo).

Carlos: —Más o menos.
Ricardo: —Sí, pero esto no es *hache*, es *erre*. Vamos que es lo mismo.

A la vez que leen, van remarcando oralmente la información fundamental para la comprensión del problema, como que el radio es igual a la altura (r=h) o que la altura es inversamente proporcional a la posición en la torre. Uno de ellos gesticula a la vez que describe oralmente la forma de la torre, mientras otro, simultáneamente, dibuja un esquema de la situación:

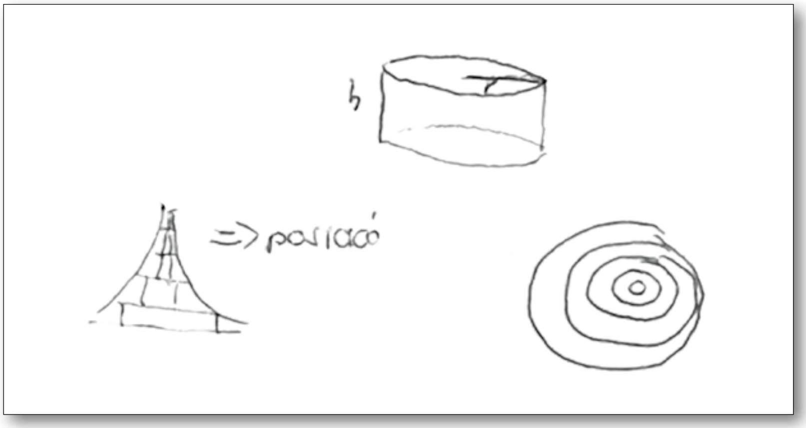


Fig. 3. Dibujo de Carlos

Inmediatamente los tres alumnos parecen estar de acuerdo con la imagen que evoca el problema, y lo reafirman con sus palabras, a pesar de que en el enunciado se habla del inverso de un número ordinal, lo que les podría haber llevado a un conflicto. Han avanzado a un nivel superior en la comprensión de su conocimiento que no está ligada a imágenes concretas, ejemplos o acciones particulares; en el modelo de Pirie y Kirien, este nivel es el de *Image Having*:

Carlos: —Claro, pues si es que un cilindro está aquí, otro aquí, otro aquí… (Gesticula para simular la forma de la torre).
Manuel: —Claro.
Carlos: —Uno está arriba, otro está abajo…
Manuel: —Todos están sobre el mismo eje y…
Ricardo: —Qué va a estar un cilindro sobre otro.

Sin embargo, y a pesar de que el enunciado explicita cómo está construida la torre, cuando realizan acciones matemáticas que implican un mayor nivel de abstracción, como es el hecho de asociar un valor al radio y la altura de cada cilindro en función de su posición, tal y como lo han construido mentalmente, uno de los alumnos, Ricardo, expresa verbalmente que duda acerca de la posición de los cilindros en la torre:

Ricardo: —Posición, ¿cuál es la posición?

Los otros dos compañeros, que aparentemente habían comprendido la situación del problema, son incapaces de darle una explicación y recurren a la profesora:

Ricardo: —Lo de la posición, ¿se lo preguntamos? (Profesora). Lo de la posición, ¿a qué se refiere? Visto en esto.
Profesora: —Pues que el primer cilindro tiene radio y altura uno, el segundo radio y altura un medio, el tercero radio y altura un tercio.
Ricardo: —Sí. Eso sí, pero…
Profesora: —Por eso digo que es *inver*…
Ricardo: —…proporcional a la posición…
Profesora: —…a la posición del cilindro en la torre. El primero, el segundo, el tercero.

La pregunta de Ricardo desencadenó un *folding back* con el que se ven arrastrados todos los alumnos del grupo a un nivel inferior de la compresión del conocimiento, por la necesidad de envolverse en una actividad que les permita afianzar la imagen de cómo está construida la torre. Esto lo resuelve la profesora cuando relee el enunciado y remarca, con el tono de voz y sus gestos, los ordinales que se asignan a cada cilindro: el primer cilindro, el segundo, el tercero, etc. Con esta acción dirige a los alumnos al nivel de *Image Making* en el que vuelven a manipular los cilindros con los que se construye la torre.

A pesar de que el enunciado hacía referencia explícita al tamaño de los radios de los sucesivos cilindros, hasta que la profesora no enfatiza los ordinales los alumnos no llegan a asumir que el primer cilindro tiene radio y altura 1, el segundo tiene radio y altura ½, y así, para cada cilindro, el radio y altura son inversamente proporcionales a la posición del cilindro en la torre comenzando desde la base.

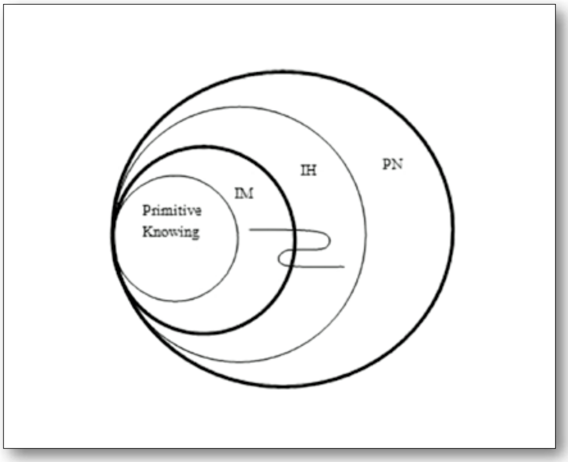


Fig. 4. Construcción de la imagen de la torre

El resultado de este *folding back* les lleva a generalizar cuál es el radio y la altura de un cilindro cualquiera:

Ricardo: —…la posición, posición del primero, posición del segundo.
Manuel: —Claro.
(…)
Carlos: —El primer radio es uno, el segundo es uno partido de dos.

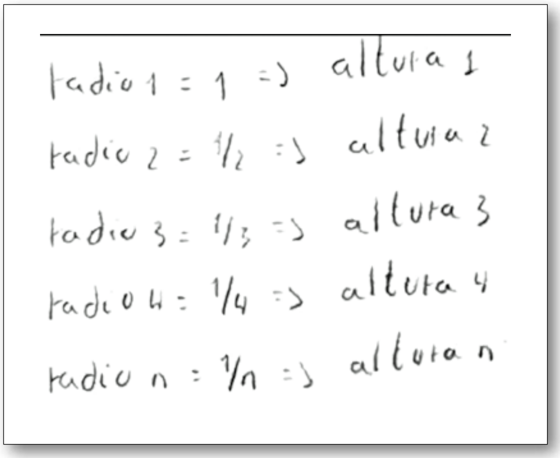


Fig. 5. Anotaciones de Ricardo

En este punto, de nuevo se encuentran en el nivel siguiente correspondiente a *Image Having*, con una imagen de la construcción de la torre afianzada.

Obtención de la serie que modela la altura de la torre

Una vez construida la imagen de la torre, comienzan el trabajo de búsqueda de la expresión algebraica del término general de la serie numérica que modela su altura final. Para ello, evocan la información que han adquirido sobre la construcción de la torre y, sin necesidad de acciones particulares ni ejemplos, desarrollan un plan mental de actuación hasta llegar a la expresión algebraica correspondiente:

Ricardo: —Ahora, ¿cuál es la altura final?
Carlos: —Después de hacer toda la serie.
(…)
Ricardo: —Cuál es la altura final. La altura es la suma (…) sumatorio de uno partido ene.

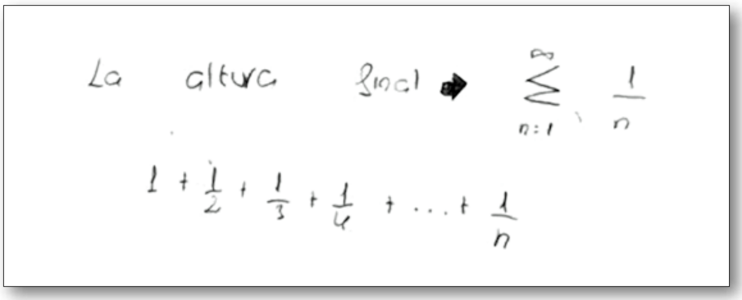


Fig. 6. Anotaciones de Carlos

A partir de la altura de los primeros cilindros, los alumnos han sido capaces de generalizar la altura correspondiente a un cilindro cualquiera y que la altura final de la torre se modela con la suma de una serie. Con estas acciones, alcanzan un nivel exterior (*Property Noticing*) en la compresión del conocimiento de este objeto matemático.

Sin embargo, al igual que les ocurrió anteriormente, se produce una confusión entre la altura de la torre formada por ene cilindros y la altura del enésimo cilindro, es decir, entre los elementos matemáticos $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ y a_k (Codes, 2010). Para diferenciar estos dos elementos, el grupo regresa desde *Property Noticing* hasta un nivel inferior, *Image Having*, lo que supone un nuevo *folding back* en el que no interviene la profesora:

Ricardo: —Espera. La altura final es de todo junto ¿no? ¿O del último cilindro?
Manuel: —La altura final es de todo. Incluyendo el primero.
Ricardo: —De todo, pues es uno,…
Manuel: —Exactamente.
Ricardo: —…más un medio, más un tercio, más un cuarto, *tatá*, *tatá*, más uno a la ene.
Manuel: —Sí.
Ricardo: —Que esto es el sumatorio de uno partido de… Está bien.
Manuel: —Claro, es lo que te he dicho antes.

Una vez que se ha producido el *folding back*, resuelven la dificultad de forma autónoma, confirman su construcción y vuelven de nuevo al nivel *Property Noticing*. Este avance no es simultáneo, como se puede observar en el diálogo anterior, primero lo consiguen Manuel y Carlos, y posteriormente Ricardo con el apoyo de sus compañeros.

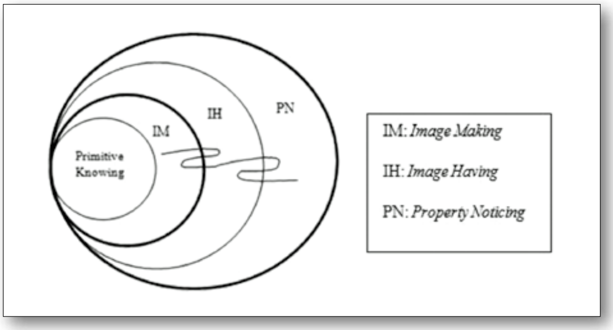


Fig. 7. Obtención de la serie que modela la altura de la torre

En el transcurso de los diez primeros minutos de la sesión de clase, los alumnos han construido la imagen de la torre y la serie correspondiente a la altura de esta. A partir del nivel más intuitivo (*Image Making*), los alumnos han ido avanzando por sucesivos niveles de comprensión, retrocediendo a medida que se han encontrado con dificultades, hasta alcanzar un nivel más abstracto (*Property Noticing*).

Obtención de la serie que modela el volumen de la torre

Tras la construcción de la serie correspondiente a la altura, comienza su trabajo con la serie del volumen. Inicialmente el grupo se encuentra en el nivel de *Image Having*, ya que parten del conocimiento construido para la altura y, haciendo un paralelismo, los alumnos se dan cuenta inmediatamente de qué es lo que les piden.

Ricardo: —…Ahora el volumen es también ¿de todo? ¿No? Sí.
Carlos: —Hombre, si te pone altura final y volumen final y la altura final la hemos hecho así.
Ricardo: —Vale, pues el volumen, el volumen de este (…) Vamos a hacer el volumen del primero para…
Manuel: —¿Qué volumen?

A diferencia de lo que ocurre con la serie de la altura, antes de comenzar con el trabajo del tópico que hay que investigar deben recurrir a un conocimiento previo (*Primitive Knowing)*: la fórmula del volumen de un cilindro.

Ricardo: —El volumen del cilindro es base…
Carlos: —Pero si te lo ha dicho. Área de la base por altura.
Ricardo: —Base por altura.
Carlos: —*Pi* radio cuadrado *hache*.

Este *folding back* es mucho más breve que cualquiera de los dos anteriores, ya que simplemente han de recordar una fórmula y comenzar a trabajar sobre ella, además de discutir sobre cómo deben usar el número irracional π. Tras él, vuelven al nivel de *Image Having* del que partieron.

Carlos: —*Erre* vale uno y *hache* vale uno…
(…)
Ricardo: —…por *hache*. Volumen es *pi* por uno al cuadrado, volumen es *pi*. Vale, ese el primero. Esto es *pi*…

Cuando ya se tienen que enfrentar a la construcción de la serie, aparece un nuevo *folding back* de carácter totalmente distinto al anterior. Si antes solo necesitaban recordar un conocimiento primitivo, ahora, en el cálculo del volumen, les vuelve a surgir la duda sobre la construcción de la torre, algo que parecía totalmente superado en el apartado anterior.

Carlos: —No, no es un sumatorio, de momento estás calculando solo la…
Ricardo: —No, el volumen, el volumen sí. El volumen del segundo cilindro es…
Carlos: —*Pi* cuartos.
Ricardo: —¿Y la altura? Claro, pero es que espera, espera…
Manuel: —No tío.
Ricardo: —Tú antes, para *cal*… Si en el primero hemos dicho que la altura del segundo es uno más un medio. ¿No?
Carlos —Ah sí.
Ricardo —Pues ahora es el volumen del segundo, es el del primero más el del segundo ya.

Durante toda esta conversación se producen continuos *folding back* en la frontera entre dos niveles, el de *Image Having* y el de *Image Making*, debido a la continua confusión entre el cálculo del volumen de cada cilindro y el de la suma de todos ellos, porque no saben qué altura considerar en cada caso.

Ricardo: —…A ver, el del segundo solo es el del segundo solo, pero para calcular todo hay que hacer el del primero más el segundo.
Carlos: —Claro, pero estábamos calculando solo el segundo.
Ricardo: —Vale. La altura del segundo (…) Vale, pues entonces hacemos la altura del segundo que es…
Carlos: —Claro, el del primero es *pi*, el del segundo lo que sea…
Ricardo: —Vale.
Carlos: —…el del tercero lo que sea.
(…)

Manuel: El del segundo, el del segundo es *pi* octavos.
Ricardo: —*Pi* octavos…
Carlos: —Sí, porque luego tienes que multiplicar por un medio de la otra altura. Sí.
Ricardo: —Vale, y ahora hacemos el del tercero, para ver qué da.
Carlos: —Yo creo que deberíamos hacer hasta el cuarto.

Una vez llegados a este punto, tantean una generalización de la fórmula del volumen de cada cilindro anticipando cuál será la del tercero, pero se confunden en los cálculos puesto que piensan en potencias de dos. Al ser conscientes de que su propuesta no es válida, siguen haciendo los cálculos para buscar esta generalización:

Ricardo: —No, dependiendo de ahora si da... de si ahora da dieciséis, o da...
Manuel: —Otra cosa.
Carlos: —Da treinta y dos, creo.
Ricardo: —O puede dar treinta y dos, claro. *Pi* por el radio de este es… ¡Hala! Es un noveno por un tercio.
Manuel: —*Pi* dieciochoavos.
Ricardo: —Hala. ¿Qué dices de dieciocho?, veintisiete.
Manuel: —Veintisieteavos, perdón.
Ricardo: —Ah, hacemos otro. Si da, si da…
Carlos: —Pero cómo que *pi* partido (…) ¿eh?
Ricardo: —Si el siguiente da sesenta y cuatro, creo que tengo sacada la expresión ya, tío.

Las transiciones entre los dos niveles de *Image Having* a *Image Making* son continuas. Si la anterior conversación puede ser ejemplo de una comprensión del conocimiento dentro del nivel de *Image Having*, seguidamente aparece de nuevo la duda de uno de los miembros del grupo sobre las operaciones realizadas que los devuelve, mediante un breve *folding back*, al nivel inferior, *Image Making*.

Carlos: —Espera, a ver, ¿por qué has puesto veintisiete? Espera que haga yo la cuenta.
Ricardo: —Hazlo bien. Sí da eso, creo.
Manuel: —No, el siguiente va a dar…
Carlos: —No, espera, que yo estoy diciendo todavía el tres, ¿eh?
Ricardo: —Ah, *erre* al cuadrado es un tercio.
Carlos: —Sí.
Manuel: —Cincuenta y cuatro es, creo.
Ricardo: —Al cuadrado, un noveno, y la altura es un tercio. Tres por nueve veintisiete, tío.
Carlos: —Sí, sí.
Manuel: —Qué fácil. Tres por *ene*, creo. No.
Carlos: —No, porque el primero no…
Ricardo: —Qué buena, qué buena, es lo que he dicho yo, chaval. *Pi* partido sesenta y cuatro. Y ya sé cómo es. Es sumatorio de *pi* partido *ene* al cubo.

Con esta última intervención, Ricardo consigue señalar cuál es la expresión de la serie del volumen, por lo que podemos considerar que se encuentra en un nivel superior de comprensión, *Property Noticing.* Los otros dos miembros del grupo lo consiguen también pero más tardíamente, y tras ciertos titubeos relacionados con sus inseguridades tanto en el cálculo numérico de cada volumen como en el resultado de la suma de todos ellos.

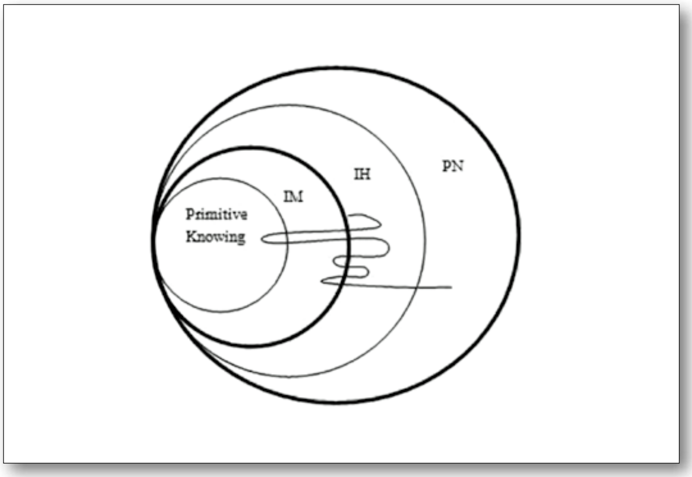


Fig. 8. Obtención de la serie que modela el volumen de la torre

En este último caso, el hecho de que uno de los miembros del grupo acceda a un nivel exterior de conocimiento de forma más rápida que el resto, y no presente dificultades con los cálculos, hace que los demás se vean arrastrados por su forma de razonar hacia niveles superiores y más consolidados en la comprensión del conocimiento.

Determinación de la convergencia de las series

Cuando tienen construidas las series correspondientes a la altura y al volumen de la torre, se enfrentan a un nuevo problema: estudiar su convergencia.

Antes de comenzar con el trabajo concreto, llaman a la profesora y se cercioran de que las dos series calculadas son correctas. La profesora les ayuda indicándoles cuál es el camino que deben seguir, incluso dándoles algunas pistas como, por ejemplo, la irrelevancia del número π para estudiar la convergencia.

Profesora: —Bueno, tenéis dos series, ¿no? Bueno, mirad primero una y luego otra. Fijaos en una, ¿en cuál os vais a fijar primero?
Manuel: —Alturas.
(…)
Profesora: —¿Qué serie tenéis ahí? Tenéis que (…) estudiar la convergencia, al final ¿qué es? ¿Qué es la convergencia de una serie?
Ricardo: —El *pi*, el *pi* se deja como *pi*.
Profesora: —*Pi* es constante. *Pi* no te afecta, al carácter no te afecta.

Para enfrentarse al problema de la convergencia, parten del nivel *Image Making* ya que persiste la confusión entre la serie que han construido y una sucesión, puesto que calculan el límite del término general de la serie.

Carlos: —¿No sería el límite de esta sucesión cuando *ene* tiende a…?
Manuel: —Tiende a cero.
Carlos: —No, a infinito. Porque los primeros valores que te… Si es infinito, y si es cero, converge.

Manuel: —¿A qué tiende?
Carlos: —Si te sale…
Manuel: —¿A qué tiende *ene*? A infinito
Carlos: —Al mismo tiempo. A infinito. Es que es lógico…
Manuel: —Sí, sí, sí.
Carlos: —…vamos de uno a infinito, tiende a infinito.
Manuel: —Sí, sí, sí, está claro. Eso es (…) cierto
Carlos: —¿Y no sería uno partido infinito (…)? Tendería a cero.

El cálculo de ese límite los conduce a discusiones sobre su valor y sobre indeterminaciones, aunque todavía no se han dado cuenta de que tienen que estudiar la convergencia de la serie en lugar de calcular el límite del término general de la sucesión. Uno de ellos decide buscar información en sus apuntes y, en este momento, Ricardo se da cuenta de que deben usar los criterios de convergencia y determinar de qué tipo es la serie. Podemos decir que han avanzado a un nivel superior de su conocimiento y se encuentran en *Image Having*.

Ricardo: —Tío, es que esto es muy raro. ¿Se hace con los criterios?
Carlos: —Sí tío.
(Ricardo revisa los criterios)
Manuel: —Tienes que…
Ricardo: —Mira tío. Mira, mira, mira, mira…
Manuel: —Criterio del cociente.

Deciden aplicar el criterio del cociente pero confunden a_{n+1} con a_n+1, es decir, se enfrentan a un problema básicamente algebraico. Para resolverlo, se ven abocados a un nuevo *folding back*, y vuelven al nivel correspondiente a *Image Making*, aunque en este caso su problema no está en el estudio de la convergencia:

Ricardo: —…uno partido *ene* más uno, partido uno, partido *ene*, cuando *ene* tiende a infinito, es igual al límite de…
Manuel: —No, no, no, no. Mal, mal, mal. O sea, esto no es uno partido *ene* más uno, sino es, no confundas a sub *ene* más uno con «a» (…) O sea, no confundas a sub *ene* y luego más uno, que a sub *ene* más uno.
(…)
Ricardo: —¿Cómo, cómo?
Manuel: —A sub *ene* más uno, sustituyes en vez de *ene*, pones *ene* más uno, en donde haya. O sea, uno partido *ene* más uno.
(…)
Carlos: —Claro. A la *ene* le incrementas, no le incrementas a todo.

Después de este *folding back*, los alumnos crecen en su compresión del conocimiento, lo que implica pasar a un nivel superior; en este caso *Image Having*, incorporando estos nuevos aspectos ya construidos: ya diferencian los elementos matemáticos a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y saben calcular el límite del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ para decidir acerca de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto les permite aplicar el criterio del cociente para esta serie:

Manuel: —Da uno esto, chicos. *Ene* partido *ene* más uno.
Ricardo: —Es, el límite,…
Manuel: —¿Infinito entre infinito?
Ricardo: —…espera, uno partido…
Manuel: —Uno.
(…)
Ricardo: —*Ene* (…) cuando *ene* tiende a infinito. Esto, ¿has llegado hasta aquí, el límite de *ene* partido de ene más uno?
Manuel: —Sí, sustituyes *ene*…
Ricardo: —Cuando *ene* tiende a infinito.
Manuel: —Da uno.

Este criterio no les permite decidir acerca de la convergencia de esa serie al obtener como límite 1, lo que les confirma la profesora. La intervención de esta les impide realizar un *folding back* que les permita volver al nivel *Image Making* para buscar otra forma de estudiar la convergencia de la serie.

Profesora: —Este límite es uno, vale. Pero el criterio del cociente aquí no decide. ¿No?
Ricardo: —Vale.
Profesora: —…el límite es uno, el criterio falla.

La profesora los guía ayudándolos a clasificar el tipo de series que están estudiando para establecer su convergencia. De esta forma, se dan cuenta de que las series que están manejando son armónicas. Concretamente su explicación se centra en la serie de la altura:

Profesora: —¿Y no, y no, y no podéis verlo más fácil, que no sea con un criterio de esos? ¿Quién es esa serie?
Manuel: —¿Cómo?
Ricardo: —¿Es una serie geométrica?
Profesora: —¿La geométrica? ¿Qué pintas tiene la geométrica?
Ricardo: —Que era multiplicando.
Profesora: —*Erre* a la *ene*, uno partido *erre* a la *ene*.
Ricardo: —A la *ene*, eso.
Manuel: —Ya está.
Profesora: —No, esta es la geométrica.
Ricardo: —Sí, sí tengo ahí la hoja.
Profesora: (A la clase). —Mirad a ver qué serie es esa.
Carlos: —El logaritmo, tío.
Ricardo: —Eso, cómo se llama. Una armónica de esas.
Manuel: —Que no es armónica.
Carlos: —¿Cómo qué…?
Ricardo: —¿Es armónica (profesora)?
Profesora: —(Desde lejos). Es armónica.

En este momento, y con la ayuda de la profesora, han llegado a un nivel de *Property Noticing*, puesto que han averiguado que las series que están tratando son de la familia de las armónicas. Por la premura del tiempo, ya que la clase finaliza y la profesora desea que terminen el ejercicio, las intervenciones de ella van dirigiéndoles hacia el punto clave de la tarea: el estudio de la convergencia de las series. Así llegan al nivel de *Formalising* diferenciando la convergencia de ambas series, y utilizan para ello el criterio de convergencia de series armónicas:

Profesora: —Claro, las dos son armónicas. Ahora decidme, (…) si convergen o no convergen ¿no?
(…)
Ricardo: —…Esto es (lee), la serie converge si alfa es mayor que uno, y no converge si alfa es menor que uno.
(…)
Ricardo: —Esta converge y esta no.
Profesora: —Claro.
Manuel: —La segunda no converge.
Ricardo: —No, la segunda sí.
Carlos: —La del volumen no,…
Manuel: —Espérate que no lo he leído.
Carlos: —…la del volumen sí.
Manuel: —La del volumen sí y la otra no.

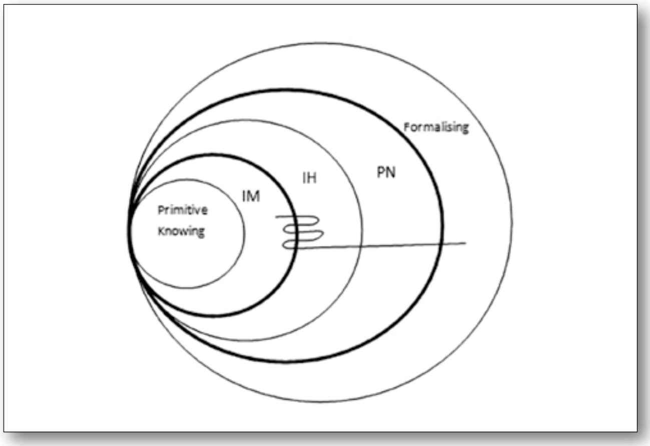


Fig. 9. Convergencia de las series

Dado el tiempo del que disponían, la profesora contribuyó a la solución de la tarea dándoles indicaciones que les condujeron a establecer el tipo de serie que habían obtenido, el criterio de convergencia que había que usar y el establecimiento de que una de las series era convergente y otra divergente. Para finalizar, la profesora llama la atención sobre el hecho de que la serie de las alturas es divergente, mientras que la serie de los volúmenes converge, aunque en principio les pudiera parecer que debía ser al contrario.

DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación ponen de manifiesto cómo estos alumnos se han enfrentado a cuestiones aparentemente muy simples para la resolución de la actividad, como la traducción del enunciado de un problema y su modelización mediante una serie numérica; cómo han recurrido a sus conocimientos previos que nada tienen que ver con la propia serie como son, en este caso, el cálculo del volumen de un cilindro, o el del límite de un cociente; cómo van aclarando los conceptos involucrados en esta tarea, distinguiendo entre el término general de una sucesión y las sumas parciales de la serie, siendo conscientes de cómo se establece la convergencia de una serie y siendo capaces de determinar no solo el tipo de series que están estudiando sino la convergencia de cada una de ellas.

Los estudiantes han realizado diferentes actividades que les han ayudado a crearse una idea matemática del concepto (IM). Una vez creada esta idea, se pueden liberar de las acciones concretas sin necesidad de recurrir a ejemplos específicos para avanzar en la resolución de la actividad (IH). Este proceso les lleva a darse cuenta de que los objetos que están manipulando tienen ciertas propiedades (PN) y, finalmente, recurren a algunos conocimientos teóricos para resolver la tarea (F).

En este estudio, se ha constatado que este proceso no es lineal, no se asciende de un nivel de comprensión del conocimiento matemático inferior a otro superior «acumulando» saberes. Más bien es una construcción recursiva (Pirie y Kieren, 1989) que implica necesariamente una o más «vueltas atrás», a formas más sencillas de conocer los diferentes elementos matemáticos y que, apoyándose en ellas, se puede seguir avanzando hacia niveles exteriores del modelo en el que el conocimiento se hace más sofisticado y también más consolidado.

Estos «retrocesos» son lo que en el modelo se denominan *folding back*, y haciendo uso del significado literal de la expresión, suponen un engrosamiento en su conocimiento, un enriquecimiento de su comprensión del concepto (Codes *et al.*, 2012), pero también en su forma de hacer matemáticas.

El papel que juega el *folding back* es esencial para reconocer cómo los alumnos avanzan en la comprensión del conocimiento; no se puede considerar un problema ni se debe minusvalorar. Cuando los alumnos van comprendiendo cierto tópico matemático, van «rellenando» aspectos conceptuales y procedimentales, y para ello deben recurrir a conocimientos previos que se creían completamente consolidados, lo que les llevan a un punto diferente, a un nivel inferior del modelo. Una vez superado, pueden volver al nivel del que partían, pero no exactamente al mismo lugar, su aprendizaje es mayor, más estable y, a partir de él, pueden seguir avanzando.

Algunos *folding back* surgieron en el seno del grupo de forma natural, debidos a las inseguridades tanto conceptuales como procedimentales en algunos casos de los miembros del grupo. Estas dudas sirvieron en ocasiones para resolver algunos dilemas planteados en el desarrollo de la solución, en otros para volver a un nivel inferior que les permitió reforzar un conocimiento aparentemente superado y sobre el que vuelven a brotar dudas, tambaleando el progreso posterior. Tras cada *folding back*, su comprensión del conocimiento se vuelve más sólida, más consolidada, más urdida la trama que conecta el nuevo conocimiento con los previos, y por tanto su progreso es más estable.

Otros que les permitieron progresar en la comprensión fueron provocados por la profesora. Sin embargo, algunas de sus intervenciones impidieron realizar *folding back* a los alumnos, ya que cuando le plantearon sus dudas en lugar de orientarles para que las resolvieran por sí mismos, les dio directamente la solución. Esto es habitual en la dinámica de una clase con un gran número de alumnos, en la que el docente desconoce en qué punto se encuentran y cuál sería la intervención más apropiada para cada uno de ellos, resolviendo globalmente los conflictos que aparecen y dirigiendo de alguna manera su actividad para que resuelvan el problema propuesto en el límite de tiempo de la clase.

También se ha observado que, en un grupo de trabajo, el hecho de que los diferentes miembros alcancen niveles de razonamiento distintos es algo habitual, así como que las dudas y los fallos en la comprensión de alguno de los miembros conduzcan a un *folding back* hacia niveles inferiores en la compresión del conocimiento, a los que se ven arrastrados otros miembros del grupo.

CONCLUSIONES

El modelo teórico de Pirie y Kieren (1992) ha permitido describir el proceso de comprensión que han seguido unos alumnos mientras resolvían la actividad descrita en este artículo, durante una sesión de clase, asociando la resolución de esta con los niveles del modelo.

Se ha puesto de manifiesto que la comprensión del conocimiento matemático de los alumnos es un proceso personal, pero que puede ser modificado por los elementos del entorno: cada alumno individualmente, con sus conocimientos, dificultades e intereses personales y también con su actitud al acercarse a la actividad planteada; los compañeros que trabajan en equipo en la resolución de un problema; el profesor, con su metodología e intervenciones en cada momento.

Este trabajo se sustenta sobre un modelo teórico que no es un modelo de enseñanza sino de aprendizaje. Un conocimiento profundo de los procesos de comprensión de los alumnos puede ser usado por el profesor para mejorar los métodos de enseñanza de forma que sean más efectivos. Aun así, en la práctica docente un profesor se encuentra con limitaciones de tiempo, espacio, intereses, número de alumnos, lo que condiciona el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Futuras investigaciones permitirán profundizar en el papel que juega tanto el profesor como los compañeros en los *folding back*, tan determinantes en este modelo para permitir un avance en la comprensión del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, June*. Disponible en línea <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/bagni.pdf> (consulta, febrero del 2007).

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.* Tesis doctoral, Salamanca: Universidad de Salamanca.

Codes, M., M. T. González, L. Delgado y M. C. Monterrubio (2012). Growth in understanding the concept of infinite series: a glance through Pirie and Kieren Theory. *Proceedings of ICME 12*, Seúl (Corea), pp. 2660-2669.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), pp. 149-168.

González-Martín, A. S. (2010). The concept of series: teachers' conceptions and teaching practices. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME34)*, 3, pp. 33-40, ISSN: 0771-100X.

González-Martín, A. S. y M. Camacho (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 479-486.

González-Martín, A. S., E. Nardi e I. Biza (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), pp. 565-589.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. En: A. D. Cockbrun y E. Nardi (eds.). *26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, Norwich, England: School of Education and Professional Development, University of East Anglia, pp. 209-216.

Kidron, I., N. Zehavi y E. Openhaim (2001). Teaching the limit concept in a CAS environment: students' dynamic perceptions and reasoning. *25th PME Conference*, 3, pp. 241-248.

Kyriakides, A. O. (2010). Engaging everyday language to enhance comprehension of fraction multiplication. En: V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.). *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Lyon, France: CERME, pp. 1003-1012.

Manu, S. S. (2005). Growth of mathematical understanding in a bilingual context: analysis and implications. En: H. L. Chick y J. L. Vincent (eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 289-296.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, pp. 64-85.

Martin, L. C. y S. Pirie (2003). Making images and noticing properties: The role of the computer in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), pp. 171-186.

Pirie, S. (1988). Understanding – Instrumental, relational, formal, intuitive…, How can we know? *For the Learning of Mathematics*, 8(3), pp. 2-6.

Pirie, S. y T. Kieren (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), pp. 7-11.

Pirie, S. y T. Kieren (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 505-528.

Pirie, S. y T. Kieren (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 165-190.

Walter, J. y S. Gibbons (2010). Student Problem-Solving Behaviors: Traversing the Pirie-Kieren Model for Growth of Mathematical Understanding. *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF A NUMERICAL SERIES THROUGH PIRIE AND KIEREN MODEL

Myriam Codes Valcare
Universidad Pontificia de Salamanca
mcodesva@upsa.es

María Laura Delgado Martín, María Teresa González Astudillo, María Consuelo Monterrubio Pérez
Universidad de Salamanca
laura@usal.es, maite@usal.es, chelomonterrubio@usal.es

Pirie and Kieren's model has been efficient to describe and analyze the growth of mathematical understanding on different topics. This model is defined by eight levels represented in a nested diagram (Martin, 2008) to emphasize that when someone moves to an outer level, s/he will keep the main characteristics of the inner levels. In this sense, understanding is a full dynamic process (Pirie, 1988), not only a combination of knowledge levels. Besides, the growth in understanding is not a one-way path; growing can imply going back and forth. The eight levels of the model are: Primitive Knowing (PK), Image Making (IM), Image Having (IH), Property Noticing (PN), Formalising (F), Observing (O), Structuring (S) and Inventising (I).

Primitive Knowing (PK) is made up by everything the student knows and can do except for the knowledge of the specific topic of the task proposed. It does not imply a low mathematical level.

When students need specific activities to represent the mathematical topic, we can say they are in the Image Making (IM) level. If they are able to use a mental image of the topic without doing specific activities or working with examples, students are in the Image Having (IH) level. The Property Noticing (PN) level is achieved when students work with the images formed and try to find properties and generalizations.

Students reach the Formalising (F) level when they are able to think about the properties and to work with the concepts as formal objects, without making any reference to a particular image or activity. Observing (O) occurs when students think about a formal sentence and establish links between concepts and patterns to define theorems. Structuring (S) is the level in which the observations become a formal theory and students need to think logically to prove it. Finally, the outer level of the model is called Inventising (I). When a student reaches this level, s/he will be able to understand specific situations and infer, create and make hypothesis about other problems.

One of the key points of the model is the concept of "folding back" that is a movement to an inner level of the model to confront an activity from a different understanding, perhaps more straightforward or specific. This mechanism shows that the growth in understanding is not linear and that sometimes it is necessary to go back to an inner level. When this happens the student returns to the outer level with a better, deeper and more stable knowledge. In this sense, the student does not get to the same place, he will be more positive about the knowledge involved (Martin, 2008).

In this paper, we analyze the growth in understanding of a group of students in the subject Mathematical Principles I, working on the concept of numerical series and its convergence. They were first year students of a Degree in Systems Engineering at a private University of Spain and this group of students was selected taking into account the kind of interactions between them. They were very participative and they solved the activities in a collective way. The lessons explained theoretical aspects like the different convergence criteria about numerical series.

The students had to find the final height and volume of a tower, which was built with cylinders the same height as the base radius, and the radius was inversely proportional to the place the cylinder occupies in the tower.

To solve this task, students could use all their notes on the previous theoretical explanations. The task had to be solved in an ordinary fifty-minute class session. It is worth mentioning that some of the teacher's interventions were addressed to all the students, so this session was indeed the development of a lesson. For a better description, the students' work was divided into four episodes according to the results: construction of the image of the tower, obtaining the series of the tower height, obtaining the series of the tower volume, study of the convergence of the series.

The results of this research show that the students did different activities to create a mathematical idea of the problem (IM). After that, they do not need specific actions to solve the activity (IH). They realise that the mathematical objects they are working with have certain properties (PN) and finally they appeal to some theoretical knowledge to solve the task (F).

In this research we have also seen that understanding is not a linear process; the students do not move up from a low mathematical level to another accumulating knowledge. They need a continuous movement between layers and they will sometimes have to go back to an inner layer (folding back), and then return to an outer layer with a more sophisticated knowledge about the topic.

The role of folding back in the growth of understanding is absolutely essential. Sometimes it is generated inside the group because of insecurities related to concepts or procedures, but others it is provoked by the teacher.

This paper shows that the understanding of a mathematical concept is a process that can be modified by the social environment: each student with his/her knowledge, difficulties, interests and attitude, and the classmates and the teacher with their interactions and methodology when solving the task. These last two factors (classmates and teacher) will be the object of research in future works.