

TRABAJANDO CONJUNTAMENTE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA. EL TABLERO GEONUMÉRICO, NUEVO RECURSO DIDÁCTICO PARA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

WORKING TOGETHER ARITHMETIC AND GEOMETRY. THE GEONUMERICAL
BOARD, A NEW TEACHING RESOURCE FOR MATHEMATICS EDUCATION

**Lorenzo J. Blanco Nieto, Ana Caballero-Carrasco, Miguel Ángel Bas-Sánchez, Janeth
Amparo Cárdenas-Lizarazo**

Facultad de Educación y Psicología de la Universidad de Extremadura

Correspondencia: Ana Caballero Carrasco
Correo: acabcar@unex.es
Recibido: 2021-08-25 Aceptado: 2022-03-24
DOI: 10.17398/0213-9529.41.1.51

RESUMEN

En nuestra experiencia docente consideramos la importancia de los recursos didácticos para introducir conceptos y procesos matemáticos, en los diferentes niveles y contenidos del currículo. Trabajar con el geoplano cuadrangular y el tablero numérico nos sugirió numerosas actividades que hemos desarrollado básicamente en la formación del profesorado, y experimentado con estudiantes de primaria y secundaria. En base a ello, hemos propuesto un nuevo recurso didáctico que llamamos *Tablero Geonumérico*, cuya patente se registró en 2016.

En este trabajo describimos el nuevo recurso y mostramos problemas donde trabajamos, simultáneamente, conceptos geométricos y aritméticos (en otro nivel, también algebraicos). La novedad que aportamos, al combinar estos dos materiales, es la interacción entre geometría y aritmética y álgebra en la formulación y resolución de problemas de matemáticas, en la educación primaria y secundaria. Ello le da al Tablero Geonumérico una dimensión de transversalidad dentro de la enseñanza/aprendizaje de la Matemática.

Palabras Claves: Recursos didácticos; Geometría; Aritmética; Resolución de problemas; Formación de Profesores.

SUMMARY

In our teaching experience we consider the importance of teaching resources to introduce mathematical concepts and processes in the different levels and contents of the curriculum. Working with the quadrangular geoplane and the number board suggested numerous activities that we have basically developed in teacher training, and experimented with elementary and secondary students. Based on this, we have proposed a new teaching resource that we have called the Geonumerical Board, whose patent was registered in 2016.

In this work we describe the new resource and show activities where we work, at the same time, geometric and arithmetic concepts (on another level, also algebraic) in its resolution. The novelty that we contribute, by combining these two materials (quadrangular geoplane and the numerical board), is the interaction between geometry and arithmetic and in the formulation and resolution of math problems, in primary and secondary education. This gives the Geonumerical Board a dimension of transversality within the teaching and learning of Mathematics.

Key words: Teaching resources; Geometry; Arithmetic; Problem solving; Teacher training.

Sección / Section:	Artículos originales. Didáctica de las matemáticas
Editor de Sección / Edited by:	Luis M. Casas-García
Conflicto de intereses / Conflicts of Interest:	Los autores no declaran conflicto de intereses.
Agradecimientos	-
Financiación	-

INTRODUCCIÓN

La importancia de los materiales didácticos en la Enseñanza/Aprendizaje (E/A) de las matemáticas se apoya en que son mediadores entre los estudiantes y el aprendizaje matemático. Las actividades, juegos, experiencias didácticas tienen sentido si favorecen y propician un acercamiento a los esquemas conceptuales y a los procesos matemáticos. Igualmente, asumimos que la enseñanza de las matemáticas debe considerar recursos que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Desde esta perspectiva entendemos que los recursos son un punto de partida de la educación matemática que deben desarrollarse en un contexto de resolución de problemas, y que dan forma a las tareas que se propongan.

Además, consideramos que la acción, el lenguaje, la reflexión y la interiorización son elementos fundamentales a tener en cuenta en el uso de los recursos didácticos. Según la psicología evolutiva, el desarrollo del pensamiento concreto es el mecanismo de aprendizaje en primaria. Este tipo de proceso cognitivo se basa en la descripción de hechos objetivos y objetos físicos, por lo que debemos apoyarnos en el mundo observable, lo que impresiona directamente a sus sentidos, que es lo que les invita a actuar.

En los primeros niveles de enseñanza hay que partir de las acciones concretas con objetos familiares para ir sustituyéndolos progresivamente por símbolos y acciones interiorizadas. Es decir, potenciando un progresivo desarrollo de las capacidades y el paso de las etapas intuitivas y concretas a la etapa de las operaciones formales.

Los materiales y recursos no tienen interés didáctico en sí mismos. Su interés y utilidad está en la capacidad de provocar la acción de los aprendices en la dirección deseada. Es decir, está en las acciones lógico-matemáticas que provoquen y su uso se justifica desde diferentes perspectivas. En primer lugar, asumimos las dificultades de comprender los razonamientos verbales antes de la etapa de las operaciones formales, en los primeros años de escolaridad. Ello, hace necesario el uso de un soporte material, para lo que podemos considerar objetos que provoquen experiencias reales o utilizar un material didáctico específico que permita el desarrollo de un juego.

En segundo lugar, las actividades que se propongan tienen que permitir visualizar diversas variables y subconceptos de un mismo concepto. Ello se facilitaría con una variedad de recursos que provoquen experiencias que los evidenciaran. Finalmente, la actividad desarrollada tiene que ser motivadora y provocar la reacción de los aprendices para desear abordar y resolver las cuestiones planteadas.

Desde el dominio afectivo, Levine (1996) constata que las discusiones abstractas relativas a los conceptos matemáticos aumentan la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas mientras que la utilización de materiales manipulativos, el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje creativas para la enseñanza de conceptos matemáticos, reducen el nivel de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas.

EL TABLERO GEONUMÉRICO: UN RECURSO DIDÁCTICO PARA LA GEOMETRÍA Y LA ARITMÉTICA

En octubre de 2015, presentamos una solicitud de patente (Anexo 1) sobre un recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el que veníamos trabajando desde hacía varios años en las aulas de Formación de Profesores de Primaria, y que había

sido bien acogido por los estudiantes y cuyo uso estimábamos conveniente para trabajar con alumnos de primaria y secundaria y en las aulas de formación de profesores.

El prototipo del material propuesto (Figura 1) es una integración del Tablero Numérico (Ajosé, 1991a, 1991b; Escalona y Noriega, 1974), que permite visualizar y trabajar el sistema de numeración decimal y desarrollar diferentes actividades con los 100 primeros números, y del Geoplano cuadrangular (Arrieta, Álvarez, y González, 1997; Smith, 1990) que, de una manera sencilla, sugiere la realización de actividades aritméticas y algebraicas con las figuras geométricas planas.

El Tablero Geonumérico es un tablero de 10x10 con los números del 1 al 100. Superpuesto a este tablero se encuentra un geoplano cuadrangular con 11 puntos en cada fila y columna, formando una cuadrícula de 10x10 de cuadrados. El título 'Tablero Geonumérico' está escrito en la parte superior del tablero.

Figura 1. Prototipo del Tablero Geonumérico.

El Tablero Numérico permite visualizar los números del uno al cien (o del cero al 99) e intuir, a partir de la observación y reflexión, algunas relaciones y regularidades entre los números y del sistema de numeración decimal. Así, es posible visualizar el valor relativo de las cifras, movernos por el tablero en diferentes direcciones observando regularidades y relaciones entre números y sugiriendo actividades relacionadas con las operaciones aritméticas y el cálculo mental (Ajose, 1991a, 1991b).

El Geoplano, creado por el matemático egipcio Caleb Gattegno en 1960, consiste en un tablero con pivotes (o clavos) que permite construir figuras geométricas planas con la ayuda de gomas de colores. Existen diferentes versiones de geoplanos en función de cómo están dispuestos los pivotes: ortométrico o cuadrangular, isométrico o triangular y circular. En dichas construcciones se hacen necesario establecer unidades de medida arbitrarias-objetales (Belmonte, 2005) para determinar el perímetro y el área de las figuras elaboradas. Así como el poder establecer algunas generalizaciones.

Ambos materiales, Tablero Numérico y Geoplano, pueden representarse en papel o simularse en herramientas digitales, constituyendo recursos similares. No obstante, la actividad mental y el proceso de reflexión para las actividades con el mismo planteamiento son diferentes en cada caso. Dibujar sobre el papel provoca acciones mentales diferenciadas de cuando se manipula un tablero con pivotes usando gomas. Este recordatorio se haría con mayor intensidad si estas actividades se desarrollan en alguna herramienta en soporte digital.

La novedad que aportamos, al combinar estos dos materiales, es la interacción entre geometría y aritmética o álgebra, y en la formulación y resolución de problemas de matemáticas, en la educación primaria y secundaria. Las actividades propuestas para el uso del Tablero Geonumérico requieren de la construcción y visualización, física y/o mental, de las

figuras geométricas y del uso de las propiedades básicas del sistema de numeración decimal. Su interacción está en la base de los problemas matemáticos que pueden proponerse, que mostraremos en la segunda parte del artículo y que abarcan diferentes contenidos. Ello le da el sentido de versatilidad en línea de lo expresado en Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011).

El tablero numérico cuadrangular en el que insertamos unos clavos o pivotes en el centro de cada cuadrícula nos permite situar los vértices de las figuras geométricas en cada uno de los 100 primeros números y trabajar con estas cantidades a partir de propiedades concretas de números y figuras planas (podemos escoger del 1 al 100 como en este trabajo o del 0 al 99). El uso de gomas elásticas de colores nos permite construir figuras, al igual que en el Geoplano, que vendrán condicionadas por propiedades numéricas enunciadas previamente, que a su vez estarán determinadas por el valor numérico de los vértices de las figuras que se van construyendo.

De igual manera podríamos simular el Tablero Geonumérico con una trama cuadrada donde cada número del 1 al 100 iría inserto en un cuadrado en cuyo centro iría 'dibujado' un punto. En este caso, las gomas de colores se sustituirían por dibujos con regla y compás, aunque recordamos que el proceso mental en la resolución de los problemas puede diferir en cada caso, como consecuencia de la implicación de estrategias manipulativas.

Desde Geometría trabajaríamos diferentes figuras geométricas planas en relación a su forma y propiedades. Desde la aritmética consideraríamos las propiedades del sistema de numeración y operaciones aritméticas a partir del valor numérico de los vértices. El paso de actividades aritméticas a actividades algebraicas es sencillo a partir de enunciados concretos, pero no son objeto de este artículo. Ello nos permite proponer problemas geométricos y aritméticos y/o algebraicos e iniciar algunos conceptos estadísticos que nos sugiere esta relación, como el concepto de media aritmética. El Tablero Geonumérico nos permite enunciar problemas interesantes y motivadores para los estudiantes que relacionan conceptos y procesos geométricos y aritméticos. La experiencia desarrollada con estudiantes para maestro y en primaria y secundaria, durante varios años, así nos lo indica.

La principal aportación es la construcción de un material manipulativo que permite realizar de manera simultánea, lúdica, amena y motivadora, problemas de geometría y aritmética y otras actividades matemáticas, en primaria y secundaria.

Sobre el uso del material didáctico.

Dado que la actividad docente la desarrollamos, fundamentalmente, en las aulas de formación de profesores consideramos interesante trabajar sobre los fundamentos que justifican el uso de los recursos didácticos, así como diversas clasificaciones y condiciones de su implementación y desarrollo en las aulas de matemáticas (Flores et al, 2011 y Socas y Camacho, 2014).

En los cursos de formación de profesores de primaria, damos a conocer aportaciones importantes que sirvieron de base para generar un cuerpo propio de conocimiento sobre la educación matemática. En Socas y Camacho (2014) se reflexiona acerca del papel de los materiales con fines didácticos en clase de matemáticas aportando, entre otras cuestiones, un breve recorrido histórico que ayuda a fundamentar el papel de los recursos didácticos en la educación matemática.

El conocimiento de la evolución de los postulados sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares es importante en la formación de los profesores de primaria y secundaria, para fundamentar sus actuaciones. Por ello, recogemos aportaciones como la de Z. P. Dienes que fue de los primeros investigadores en tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, tanto la estructura de las matemáticas como la capacidad cognitiva de los estudiantes (Socas y Camacho, 2014), en un proceso constructivista que facilitaría el camino de lo concreto a lo simbólico. Así, enunció, a mediados del siglo pasado, cuatro principios para el aprendizaje matemático escolar que siguen estando vigentes y son considerados por numerosos docentes, tanto si se usan materiales manipulativos como recursos digitales: Principio Dinámico, de Constructividad, de Variabilidad Matemática y de Concretización Múltiples (Dienes, 1970, Autor, 1991, Orton, 2003, Socas y Camacho, 2014). Recordamos esta aportación para justificar las primeras actividades que permiten introducir a los resolutores de las tareas en el uso del material y, posteriormente, en la investigación matemática. Al mismo tiempo, consideramos otros aspectos importantes para justificar el uso de materiales en la educación asumiendo como objetivo general el desarrollo integral del alumno en sus aspectos cognoscitivo, emocional y social, basándonos en autores posteriores, pero esto no forma parte de esta aportación.

En la concepción y desarrollo del material hemos recordado los Principios que Dienes (1970) consideró y que facilitarán el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

* Principio dinámico. Se propondrán juegos preliminares y estructurados que les sirvan a los aprendices de experiencias para que puedan introducirse en la investigación matemática.

* Principio de constructividad. La construcción de los conceptos precederá siempre al análisis, teniendo siempre en cuenta el nivel de maduración de los alumnos. Es evidente que nos referimos a la construcción conceptual que se apoya en una actividad con un material físico que puede representar el concepto. Señalamos esta obviedad por la confusión que produce en los profesores en formación.

* Principio de variabilidad matemática. Los conceptos encierran diferentes subconceptos que deben ser estudiados mediante experiencias que supongan el mayor número posible de aquellos. La comparación de estas actividades les ayudará a establecer diferencias y semejanzas y observar las propiedades invariantes necesarias para la formación del concepto.

* Principio de concretización múltiple o variabilidad perceptiva. Tanto para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de abstracción, la misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas como sea posible.

Conjugar estos cuatro principios al planificar una actividad con recursos didácticos facilitará a los resolutores de las tareas en el paso de las operaciones concretas a las operaciones abstractas, haciendo posible la investigación matemática a nivel escolar.

PRIMERAS ACTIVIDADES SOBRE EL TABLERO GEONUMÉRICO

Actividades de adaptación al Tablero Geonumérico.

Entre otras cuestiones, cuando Dienes (1977) describía las seis etapas en el aprendizaje de las matemáticas señalaba que cuando los estudiantes inician la actividad con un nuevo recurso didáctico es conveniente considerar una fase de adaptación o de juego libre que les

permita conocer y dominar las características del material para evitar distracciones y bloqueos posteriores. En consecuencia, la primera actividad que proponemos a los estudiantes para profesores es la siguiente:

Enunciar y/o escribir en una hoja todas las regularidades, curiosidades, que veáis en el Tablero Geonumérico.

Cuando esta actividad se les plantea a los estudiantes para profesores de primaria, se quedan pensativos y un poco a la expectativa, hasta que algunos resolutores empiezan a verbalizar alguna propiedad o regularidad que observan, liberando al grupo para poder decir otras cuestiones. La reacción ha sido similar con estudiantes de niveles de primaria y secundaria. Esta situación de bloqueo momentáneo se justifica más desde el aspecto afectivo de inseguridad a la respuesta, que de la falta de conocimiento sobre el contenido relacionado con la tarea planteada.

Así, suelen iniciar con expresiones aparentemente intrascendente como:

“Todos los números de la primera columna terminan en uno”.

Cuando oímos esta afirmación mostramos nuestra satisfacción por haber encontrado alguna regularidad y le preguntamos sobre la relación entre los números de la columna que acaban todos en uno. Es inmediato la respuesta al señalar que los números van de diez en diez. Una observación física del tablero como es la de que terminan en uno, nos permite conectar con una propiedad numérica, importante en el sistema de numeración. Como elemento motivador podemos indicar que, a partir de ahora, marquen los caminos con las gomas de colores. Es evidente, que estos caminos se convertirán series numéricas iniciando así un nuevo concepto matemático importante.

Rápidamente, sugieren otros enunciados similares:

- “Todos los números de la segunda columna terminan en dos”.
- “Todos los números de la tercera columna terminan en tres”.
- Etc.

De esta forma observan que en todos los casos aumentan de diez en diez, generando similares series numéricas. Estas afirmaciones permiten mayor implicación del grupo que continuará con otras expresiones como:

- “Las unidades de los números de la diagonal principal (1, 12, 23 ...) aumentan en uno”.
- “Las unidades de los números de la diagonal secundaria (10, 19, 28, ... 91) disminuyen en uno, salvo en el primer número”.
- Que otros resolutores enunciarán en términos de series numéricas:
- “Los números de la diagonal principal (1, 12, 23 ...) aumentan de once en once”.
- “Los números de la diagonal secundaria (10, 19, 28, ... 91) aumentan de nueve en nueve”.

En estas actividades los alumnos están realizando, consciente o inconscientemente, cálculo mental y analizando propiedades de los primeros números y del sistema de numeración decimal, para encontrar alguna relación y participar en el trabajo en grupo.

En nuestra experiencia hemos observado que todas las propiedades que enuncian los alumnos esconden alguna propiedad numérica que tiene que ver con la construcción del sistema de numeración decimal y con los primeros pasos del cálculo aritmético. Estas tareas señalan la bondad del trabajo con el Tablero Geonumérico, como recurso que ayuda a comprender el sistema de numeración decimal facilitando, además, el estudio de las operaciones aritméticas y el cálculo mental.

Actividades con series numéricas.

La actividad anterior y las respuestas de los estudiantes nos sugieren trabajar, de manera más ordenada, con las series numéricas, permitiéndonos profundizar sobre las relaciones entre los cien primeros números y el cálculo aritmético, y enunciar otras actividades:

- Contar de dos en dos los números sobre el tablero.

Enumerado números pares o impares, según iniciemos la serie, podemos recorrer el tablero en sentido ascendente, descendente partiendo desde cualquier número.

- Recorrer el Tablero Geonumérico de 10 en 10 (aumentando o disminuyendo) partiendo de algún número determinado y escribir la serie que se forma.

Los comentarios de los estudiantes van en el sentido del cambio de la cifra de la decena, y el desplazamiento por la misma columna modificando en uno las unidades.

- Recorrer el Tablero Geonumérico de 7 en 7 (aumentando o disminuyendo) partiendo de algún número determinado y escribir la serie que se forma.

Según la cantidad de partida y la de aumento o disminución los estudiantes se moverán por el tablero contando o, en un nivel más avanzado, recurrirán al cálculo mental sin necesidad de referencia física del tablero.

- Completar la serie señalando los números en el Tablero Geonumérico:

4, 8, 12, 16, __, __, __,

100, 88, 76, 64, __, __, __,

1, 20, 21, 40, 41, __, __, __,

1, 2, 3, 5, 7, 11, __, __, __,

1, 3, 5, 7, 11, __, __, __,

- Señalar los criterios numéricos para desarrollar y completar las series anteriores.

En la resolución de la primera actividad se mueven en dos formas de actuación. Así, en la primera, cuarta y quinta serie recurrirán a las relaciones numéricas, mientras que en la segunda y tercera algunos responderán en función de la colocación de los números en el tablero.

- Diseñar series y mostrar a sus compañeros para que las continúen, justificando las respuestas.

Es una actividad, para finalizar el de trabajo con las series numéricas, que siempre resulta motivadora a los estudiantes que la abordan como un juego o un reto, teniendo diferentes intereses. En primer lugar, ya que los estudiantes porque para hacer una propuesta concreta necesitan diseñar una serie y comprobar que es correcta, desarrollando un trabajo con rigor y, por nuestra experiencia, con acierto. Su tarea implica relacionar números y desarrollar cálculos con ellos, para que la serie que tenga sentido numérico.

El dialogo sobre la actividad entre los estudiantes provoca el desarrollo de la competencia de comunicación matemática, al estimularles a compartir sus propuestas, soluciones y dudas. Ello les ayuda a pensar y razonar, acerca de las matemáticas, de sus procedimientos y relaciones y a expresarse con claridad y convicción. Nuestra experiencia nos dice que esto se da especialmente cuando hay desacuerdo y necesidad de convencer a los otros de sus propuestas o resultados. A este respecto, señalamos que en este dialogo entre compañeros aprenden tanto los que necesitan dar las explicaciones, por cuanto deben reconsiderar sus conocimientos para ser entendidos, como los que escuchan que tienen una oportunidad para desarrollar su comprensión.

ACTIVIDADES DE CÁLCULO ARITMÉTICO CON POLÍGONOS EN EL TABLERO GEONUMÉRICO.

Algunas actividades con polígonos.

Las actividades que se proponen como muestra en este apartado justifican el uso del Tablero Geonumérico como nuevo recurso. Desarrollaremos una serie de tareas, a modo de ejemplo, para mostrar sus posibilidades en actividades que pueden enmarcarse en la interacción entre geometría y aritmética.

Vamos a ejemplificar las actividades iniciales a partir de un número cualquiera, en nuestro caso será el 34, y en torno a este número propondremos diferentes tareas. Empezaremos construyendo cuadriláteros para ampliar a otros paralelogramos, trapecios y trapecoides y otras clases de polígonos.

- “Construir, con las gomas elásticas, un cuadrado, alrededor del 34”.

Aunque no se especifique que el 34 esté en el centro del cuadrado todos los estudiantes, independientemente del nivel escolar, asumen el hecho de situar el 34 en el centro del polígono construido, aunque caben otras soluciones. Esta situación debe ser comentada una vez hayan dibujado las figuras para recordar o definir qué es el centro del cuadrado, y por extensión, el centro de un polígono regular.

Suelen mostrar una primera solución que se refleja en la Figura 2, que nos permitirá profundizar en diferentes conceptos y procesos. Así, los estudiantes construyen, en primer lugar, el cuadrado que tiene como vértices los números (23, 25, 43, 45). A esta figura le llamaremos cuadrado del 34, ya que el 34 es el centro del cuadrado y la representaremos con la cuaterna (23, 25, 43, 45).

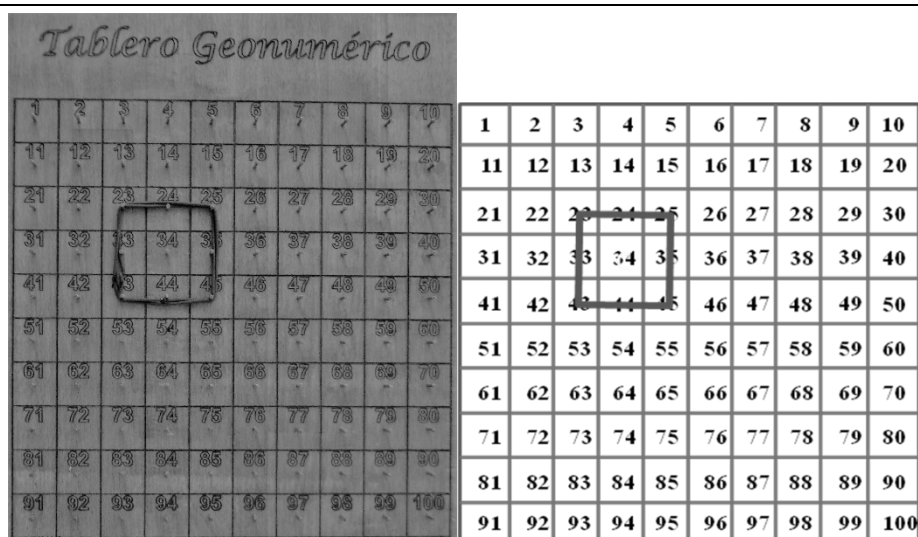


Figura 2. Cuadrado del 34. Primero que suelen construir los estudiantes.

Esta primera figura nos permite formular la siguiente tarea.

“Sumar los vértices del cuadrado y dividirlo entre cuatro”

Sol.: $23 + 25 + 43 + 45 = 136$; $136/4 = 34$

Ello significa que el “valor medio” de los vértices del cuadrado es 34. La construcción de un cuadrado nos ha facilitado el enunciado de un problema aritmético y nos servirá de soporte para un nuevo problema, que podremos enunciar de tres maneras diferentes, según el nivel de los resolutores.

- “Construir otros cuadrados alrededor del 34”.
- “Construir otros cuadrados de tal manera que la suma de sus vértices sea 136”.
- “Construir otros cuadrados tales que la media del valor de sus vértices sea 34”.

Estos dos últimos enunciados nos sugieren un nuevo texto de sustitución de los mismos, cuya validez dejamos al lector y que siempre suscitó un debate interesante entre los estudiantes. Así, planteamos la duda de si podemos enunciar el problema anterior de la siguiente manera:

- “Encontrar cuatro números del 1 al 100 cuya media sea 34.”

Suelen aparecer otros cuadrados (Figura 3) por extensión del ya dibujado, que surgen de la visualización y manipulación de la figura en el tablero. Entre los estudiantes para profesores siempre encontramos algunos que hacen los cálculos oportunos para verificar que cumplen con algunas de las propiedades numéricas enunciadas con anterioridad sobre los vértices del cuadrado inicial. Ello significa que por medio de la visualización del tablero construyen cuadrados, mientras que la aritmética les sirve de comprobación de resultados.

Así, construyen de manera inmediata dos cuadrados cuyos vértices son: (1, 7, 61, 67) y (12, 16, 52 y 56).

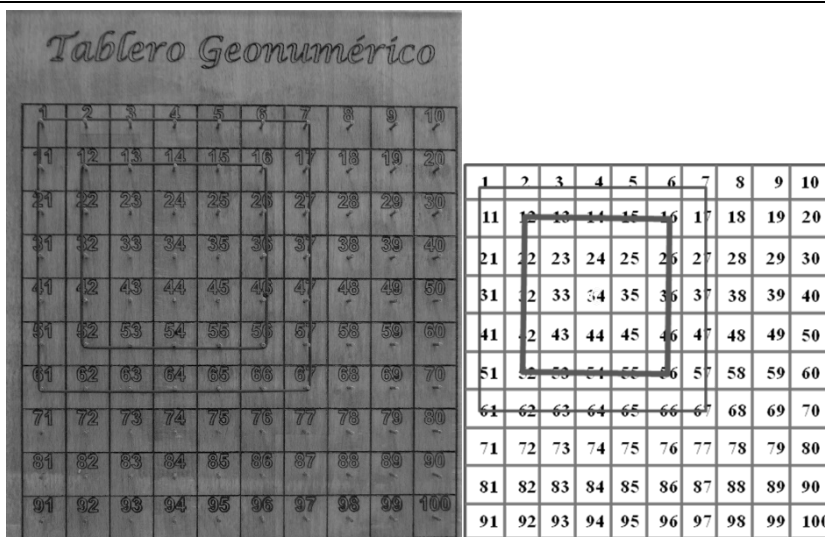


Figura 3. Otros cuadrados del 34.

Si observamos los cuadrados construidos tienen lados horizontales y verticales obviando otros cuadrados, también válidos. Estas soluciones usuales entre los resolutores tienen su base al reproducir la imagen del cuadrado siempre apoyado en un lado horizontal, usual en los textos escolares. Encontramos en esta situación un motivo importante para reflexionar sobre el concepto de cuadrado, sobre la definición y sobre la imagen y sobre el uso de los ejemplos en los libros de texto de matemática.

Realizada esta observación, planteamos un nuevo reto:

- “¿Pueden existir otros cuadrados que cumplan con la condición numérica pedida?”.

En algún caso aparece la solución dibujada en la Figura 4 que representa el cuadrado de vértices (14, 32, 36, 54) y otras figuras similares.

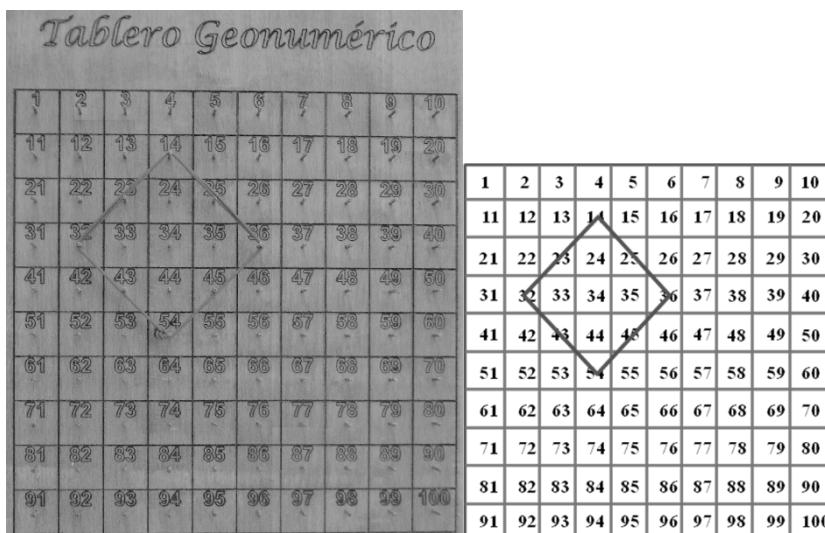


Figura 4. Cuadrado y/o rombo del 34.

Inmediatamente, a esta propuesta de solución, aparece el debate si será un rombo o un cuadrado o podrá ser las dos cosas a la vez, provocado por la posición de la figura. El debate nos lleva a profundizar sobre las propiedades de los conceptos de cuadrados y de rombos, y de la relación que se establece entre ambos (Autor, 2015) y comprobar los errores que los

estudiantes para profesores de primaria tienen al respecto (Autor, 2001). Analizar sus propiedades nos permite comprobar que cumple la definición de cuadrado y girar el tablero cuarenta y cinco grados facilita su visualización para los más remisos. El nivel de los estudiantes nos permitirá insistir en uno u otro argumento y profundizar sobre la relación existente entre ambos conceptos y las diferentes clasificaciones de los cuadriláteros (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992, y Autor, 2015).

Nuevamente, la visualización del tablero les sugiere otras soluciones: como la del cuadrilátero formado por los vértices (24, 33, 35, 44) o el de los vértices (4, 31, 37, 64), que mostramos en la Figura 5 y que nos lleva a considerar algunas propiedades del sistema de numeración cuando nos movemos en el orden natural. Sumando o restando de uno en uno si nos movemos en las filas, o sumando o restando de diez en diez, si nos movemos en las columnas.

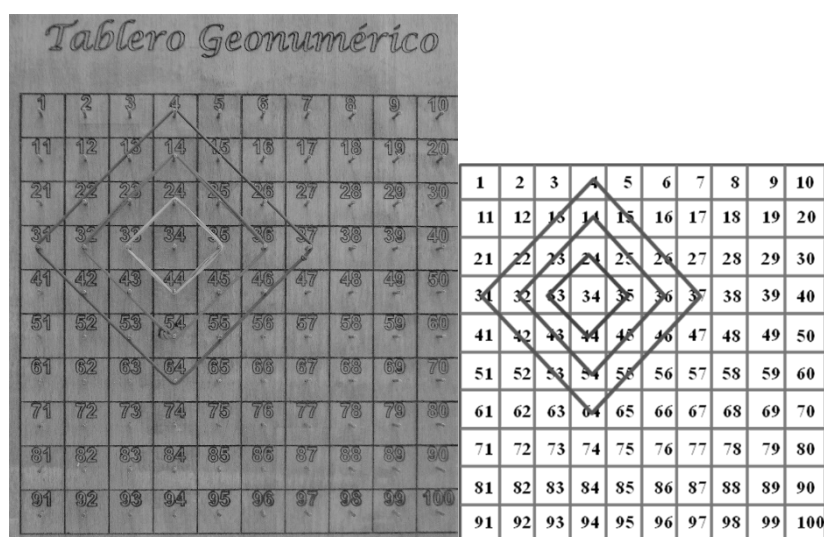


Figura 5. Otros cuadrados y/o rombos del 34.

Dependiendo del nivel educativo en el que planteemos la actividad podremos introducir o revisar otros conceptos más complejos como el de figuras semejantes, proporcionalidad o media aritmética.

La observación del tablero nos sugiere nuevos retos para proponer a nuestros estudiantes en forma de problemas:

- “¿Cuál es el cuadrado cuyos vértices suman menos? ¿Cuánto suman?”.
- “¿Cuál es el cuadrado con mayor lado que podemos construir?”.
- “¿Cuál es el cuadrado cuyos vértices suman más? ¿Cuánto suman?”.

La primera solución al primer problema es fácil: (1, 2, 11, 12).

La solución al segundo problema es trivial: (1, 10, 91, 100).

Pareciera que esta sería, también, la solución al tercer problema y así se da de manera inmediata entre los estudiantes. En este caso la suma sería 202. Sin embargo, si visualizamos el tablero, nos aparecen otras posibilidades de cuadrados que, aparentemente, pudieran llegar a 200. Así, se fijan en los cuadrados de vértices (5, 41, 49, 85) (6, 42, 50, 86) ó (16, 52, 60, 96).

En el primer caso la suma es 180, en el segundo paso sería 184 y en el tercero la suma es 224. Pero el cuadrado cuyos vértices suman más es el que se puede construir a partir de los números: (89, 90, 99, 100) que aparentemente es trivial, pero curiosamente los estudiantes no lo ven con facilidad.

De igual manera podríamos trabajar con otros cuadriláteros o polígonos. Recordando las recomendaciones de inicio el interés del material no está en el enunciado de los problemas sino en la actividad mental que desarrollan los resolutores.

CONCLUSIONES

Este material didáctico iría en la línea de lo indicado por las diferentes propuestas curriculares, según las cuales ha de incluirse el uso de materiales manipulativos en el aprendizaje matemático y más específicamente en el desarrollo de estrategias para resolver y plantear problemas.

Consideramos que el material didáctico que presentamos, que hemos denominado Tablero Geonumérico, al presentarse en un contexto de aprendizaje manipulativo, puede jugar un papel importante en la adquisición de los conceptos matemáticos, y puede ayudar a reducir la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, tal como indica Levine (1996). Además, la implementación de técnicas de enseñanza alternativas y estrategias de resolución de problemas también pueden ayudar al alumnado a ganar confianza en sí mismos. Nuestra experiencia así nos lo ha demostrado.

REFERENCIAS

- Ajose, S. (1991a). Patterns in the hundred chart. Part.1. *Mathematics Teachers*, 84(1).
- Ajose, S. (1991b). Patterns in the hundred chart. Part.2. *Mathematics Teachers*, 84 (2).
- Arrieta, J., Álvarez, J.L., y González, A.E. (1997). El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con Geoplanos. *Suma*, 25, 71-86.
- Belmonte, J.M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En C. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*, (pp. 315-346). Madrid: Pearson Educación.
- Blanco, L.J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores*. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la UEx.
- Blanco, L.J., Cárdenas, J., Gómez, R. y Caballero, A. (2015). *Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en formación de Maestros*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la UEx.
- Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI, Revista de Educación*, 3, 211 - 220.
- Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Teide.
- Dienes, Z. P. (1977). *Las seis etapas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Teide.
- Escalona, F. y Noriega, M. (1974). *Didáctica de las Matemáticas en la escuela primaria*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.
- Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, 23, 49-62.
- Levine, G. (1996). *Variability in anxiety for teaching mathematics among pre-service elementary school teachers enrolled in a mathematics course*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association in New York, ERIC Document Reproduction Service No. ED398067.
- Orton, A. (2003). *Didáctica de la Matemática: cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Ediciones Morata S.L. 4ª edic.
- Socas, M. y Camacho, M. (2014). Los materiales concretos y tecnológicos con fines didácticos en clase de Matemáticas. Fernández, C. M. y González, J.L., *Aprendizaje y razonamiento matemático* (pp. 355-386). Málaga Universidad de Málaga.

ANEXO 1

Datos de la patente.

Fecha de presentación del Tablero Geonumérico el 13/10/2015.

 <p>OFICINA ESPAÑOLA DE PATENTES Y MARCAS ESPAÑA</p>	 <p>① Número de publicación: 1 145 609 ② Número de solicitud: 201531104 ③ Int. Cl.: G09B 23/04 (2006.01)</p>
④ SOLICITUD DE MODELO DE UTILIDAD U	
⑤ Fecha de presentación: 13.10.2015 ⑥ Fecha de publicación de la solicitud: 30.10.2015	⑦ Solicitantes: UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA (100.0%) Vicerrectorado de Investigación, Transferencia e Innovación. Avda. de Elvas, s/n 06006 Badajoz ES ⑧ Inventor/es: BLANCO NIETO, Lorenzo Jesús; CABALLERO CARRASCO, Ana; BAS SÁNCHEZ, Miguel Angel y CARDENAS LIZARAZO, Janeth Amparo
⑨ Título: TABLERO GEONUMÉRICO	

La Oficina Española de Patentes y Marcas registró el nuevo 'Modelo de Utilidad' con el nombre de Tablero Geonumérico que habíamos propuesto (Boletín Oficial de la Propiedad Industrial, 20/01/2016). La concesión de patente del Tablero Geonumérico, publicada el 20/05/2016

DENEGACIÓN (ART31.4 LP)

Las resoluciones que se insertan en este epígrafe no son definitivas en la vía administrativa, pudiendo interponerse contra las mismas, recurso de alzada en el plazo de un mes, ante el/la Director/a de la Oficina Española de Patentes y Marcas.

21 U 201500631 (1)

22 16-09-2015

CONCESIÓN

CONCESIÓN (ART. 47.3 RP)

Conforme al art. 150 de la Ley de Patentes, se ponen a disposición del público los modelos de utilidad concedidos que a continuación se mencionan, pudiéndose efectuar la consulta prevista en el art. 47-3-g del Reglamento de ejecución de la citada Ley de Patentes. Las resoluciones que se insertan en este epígrafe no son definitivas en la vía administrativa, pudiendo interponerse contra las mismas, recurso de alzada en el plazo de un mes, ante el/la Director/a de la Oficina Española de Patentes y Marcas.

11 **ES 1145609 Y**

21 **U 201531104 (1)**

22 13-10-2015

43 30-10-2015

51 **G09B 23/04** (2006.01)

54 **TABLERO GEONUMÉRICO**

73 Universidad de Extremadura (100,0%)

Nacionalidad: ES

Vicerrectorado de Investigación, Transferencia e Innovación. Avda. de Elvas, s/n
Badajoz (Badajoz) ES

Fecha de concesión: 14-01-2016

11 **ES 1145511 Y**

21 **U 201531130 (0)**