https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Una estrategia para la formación del profesorado: el caso del cálculo diferencial elemental

A Strategy for Teacher Education: The Case of Elementary Differential Calculus

Catarina Oliveira Lucas
Instituto Politécnico Gaya. ISPGAYA. Portugal
clucas@ispgaya.pt

Alicia Ruiz-Olarría
Departamento de Didácticas Específicas. UAM. España
alicia.ruiz@inv.uam.es

Josep Gascón Pérez
Departamento de matemáticas. UAB. España
josepgasconperez@gmail.com

RESUMEN • Presentamos un trabajo enmarcado en la teoría antropológica de lo didáctico que aborda la relación entre los resultados de la investigación didáctica sobre el estudio escolar de cierto dominio de las matemáticas y el problema docente relativo al qué enseñar y cómo hacerlo en relación con dicho dominio. Nos centramos en el ámbito de la *modelización funcional* y del *cálculo diferencial elemental* y proponemos una estrategia de formación del profesorado que culmina en la construcción de una posible praxeología para la enseñanza, como punto de partida para un cambio de paradigma didáctico en la institución escolar, tan necesario como aplazado.

PALABRAS CLAVE: Formación docente; Fenómenos didácticos; Modelización funcional; Cálculo diferencial elemental.

ABSTRACT • This is a paper framed within the anthropological theory of the didactic that addresses the relationship between the results of didactic research on the school study of a certain domain of mathematics and the teaching problem of what to teach and how to do it in relation to that domain. We focus on the field of functional modelling and elementary differential calculus and propose a teacher training strategy that culminates in the construction of a possible praxeology for teaching, as a starting point for a change in the didactic paradigm in the school institution, as necessary as it has been long overdue.

KEYWORDS: Teacher education; Didactic phenomena; Functional modelling; Elementary differential calculus.

Recepción: febrero 2022 • Aceptación: marzo 2023 • Publicación: junio 2023

Oliveira Lucas, C., Ruiz-Olarría, A. y Gascón Pérez, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: el caso del cálculo diferencial elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 71-92.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640

INTRODUCCIÓN

Existen muchas investigaciones didácticas sobre algunos aspectos del estudio del cálculo diferencial en secundaria y en el primer curso universitario. Entre las investigaciones clásicas podríamos citar las que partían de la constatación de las dificultades con que se encuentran los profesores para enseñar (y los alumnos para aprender) los conceptos básicos del cálculo como, por ejemplo, los de «límite», «continuidad» y «función» (Schwarzenberger y Tall, 1978; Sierpinska, 1985; Sfard, 1989; Cornu, 1991; Dubinsky y Harel, 1992; Artigue y Ervynck, 1992). Una de las primeras explicaciones del origen de dichos errores hace referencia a la confusión entre la *imagen del concepto* y la *definición del concepto* (Tall y Vinner, 1981). Posteriormente, la problemática se amplió para abarcar el análisis de las *dificultades*, *contradicciones*, *confusiones* y *obstáculos cognitivos* que aparecen en la transición del *pensamiento matemático elemental* (PME) al *pensamiento matemático avanzado* (PMA) (Artigue, 1991; Harel y Kaput, 1991). Una de las hipótesis utilizadas para explorar esta transición utilizó la combinación de un *proceso* y el *concepto* producido por encapsulación del proceso, denominada *procept* (Gray y Tall, 1994). Estos objetos son representados por un único símbolo matemático, lo que pone de manifiesto la *naturaleza dual* de los objetos matemáticos y el papel que juega el *simbolismo matemático* en la encapsulación de procesos en objetos (Sfard, 1992). Dado que las tres nociones básicas del cálculo: «función», «derivada» e «integral» (así como la noción fundamental de «límite») son ejemplos de *procepts* (Tall, 1996), el estudio del cálculo elemental requerirá, desde el principio, la suficiente *flexibilidad* para manipular un mismo símbolo, ya sea como representante de un proceso que actúa sobre determinados objetos, ya como una entidad singular a la que se le pueden aplicar otros procesos para obtener nuevos objetos. La potencia del PMA radica, precisamente, en la *utilización flexible de la estructura dual* de los citados objetos matemáticos posibilitada, en parte, por la *ambigüedad* de la notación que se utiliza. La *rigidez* de los procedimientos estandarizados que caracterizan el PME constituye, por tanto, un obstáculo cognitivo muy importante, y explicaría muchos de los *errores conceptuales extravagantes* (Dreyfus, 1991) que presentan la inmensa mayoría de estudiantes en su primer encuentro con el cálculo (sea al final de secundaria o al principio de la universidad).

En los niveles de la enseñanza secundaria, la mayoría de los países ha reconocido la imposibilidad de introducir el cálculo formalmente. La enseñanza se apoya en una concepción dinámica e intuitiva del límite, basada en exploraciones gráficas y numéricas, junto al uso de técnicas de naturaleza algebraica. Esto permite a los alumnos resolver interesantes problemas de variación y optimización. La transición hacia aproximaciones más formales, que tiene lugar en la universidad, representa un salto inmenso, tanto desde el punto de vista conceptual como técnico. Por ejemplo, los alumnos deben reconstruir el significado de la igualdad y comprender que las igualdades en el cálculo diferencial no vienen dadas, necesariamente, como sí ocurre en álgebra, por una serie de equivalencias sucesivas, sino a partir de aproximaciones (como en el límite o la derivada) (Artigue y Ervynck, 1992; Artigue, 1998). Dado que la enseñanza tiende a dejar la responsabilidad exclusiva de la mayoría de estas reorganizaciones a los alumnos, se producen efectos dramáticos para la mayoría de estos, especialmente en la transición secundaria-universidad.

A pesar de la enorme importancia del cálculo para describir los fenómenos del mundo cambiante, como herramienta matemática de la variación, este ha sido entendido (y enseñado) tradicionalmente como el estudio de los procesos de derivación e integración en un contexto simbólico (Cantoral y Reséndiz, 2003). De hecho, como resultado de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), los libros de texto presentan definiciones formales de los conceptos centrales del cálculo olvidando el problema de la *variación de un sistema* que está en el origen de dichos conceptos (Bravo y Cantoral, 2012).

Diversas investigaciones proponen estrategias para la enseñanza de la derivada (Artigue et al., 2007; Gavilán, 2005; Bustos Tiemann y Ramos Rodríguez, 2022; García, Gavilán y Llinares, 2012), otras se centran en la enseñanza de la integral (Alanís y Soto, 2012; Cordero, 2005), mientras que, solo en algún caso, se propone un cambio de paradigma en la enseñanza del cálculo (Salinas y Alanís, 2009).

En el ámbito de la teoría APOE (Asiala et al., 1996), existen múltiples investigaciones (Sánchez-Matamoros et al., 2008; Vega Urquieta et al., 2014; Fuentealba et al., 2022) en torno a la comprensión del concepto de derivada y a la tematización del esquema correspondiente. Estos trabajos proporcionan resultados útiles para diseñar procesos de formación del profesorado, pero no se han utilizado sistemáticamente para proponer una estrategia de formación en un *ámbito que integre el cálculo diferencial y la modelización funcional* globalmente considerados. La propuesta que más se aproxima a este objetivo, en el ámbito de APOE, utiliza la modelización funcional en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes universitarios (Trigueros, 2009).

En cuanto al contraste entre los enfoques que proponen APOE y TAD, señalaremos únicamente que ha tenido lugar un fecundo diálogo entre ambas teorías en el que se ha analizado la manera en que cada una de ellas puede contribuir a desarrollar algunas nociones de la otra, sin violentar sus asunciones básicas (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011; Bosch, Gascón y Trigueros, 2017), y que se han utilizado los resultados de dicho diálogo para reformular el problema de investigación planteado por APOE sobre la enseñanza y aprendizaje universitario de las funciones de dos variables (Trigueros y Martínez-Planell, 2015).

METODOLOGÍA

El objetivo principal de este trabajo y su aportación consiste en mostrar la importante incidencia de los resultados de la investigación didáctica, presentados en Lucas (2015), sobre el diseño de una estrategia para la formación del profesorado en un ámbito que *incluye, de manera articulada, el cálculo diferencial elemental* (CDE) *y la modelización funcional* (MF) globalmente considerados. Los instrumentos para alcanzar dicho objetivo nos los proporciona la *teoría antropológica de lo didáctico* (en adelante, TAD), que constituye el marco teórico en el que se sitúa este trabajo.

La estrategia de formación del profesorado que proponemos culmina en la elaboración progresiva de una praxeología matemática que contiene ampliamente la praxeología matemática *por enseñar* en el paso de secundaria a la universidad y que, por ser útil en la institución de formación del profesorado, denominamos *praxeología matemática para la enseñanza* (Chevallard y Cirade, 2010). Dicha estrategia general fue propuesta en Ruiz-Olarría (2015) y está esquematizada de manera simplificada en la figura 1. La praxeología matemática *por enseñar* que sirve de base, así como la experimentación con estudiantes de medicina nuclear del correspondiente *recorrido de estudio e investigación* (REI), están descritas con detalle en Lucas (2015).

Para clarificar la relación entre este curso de medicina nuclear y el de formación del profesorado utilizaremos las etapas del esquema de la figura 1. En Lucas (2015) se recorren las etapas (1), (2), (3), (4) y (5) de dicho esquema en el caso particular del CDE y la MF. Este proceso culmina en la etapa (5) con el *curso de medicina nuclear*. Por otra parte, en Ruiz-Olarría (2015) se construye el citado esquema como propuesta de una estrategia general para la formación del profesorado, sin ninguna mención al caso particular del CDE y la MF. El *curso de formación del profesorado* que describiremos en la segunda parte de este trabajo recorre las etapas (1), (6), (7) y (8) del esquema, aplicadas al caso particular del CDE y la MF. Este esquema, globalmente considerado, relaciona los resultados obtenidos en medicina nuclear con el diseño y la gestión de la estrategia para la formación del profesorado.

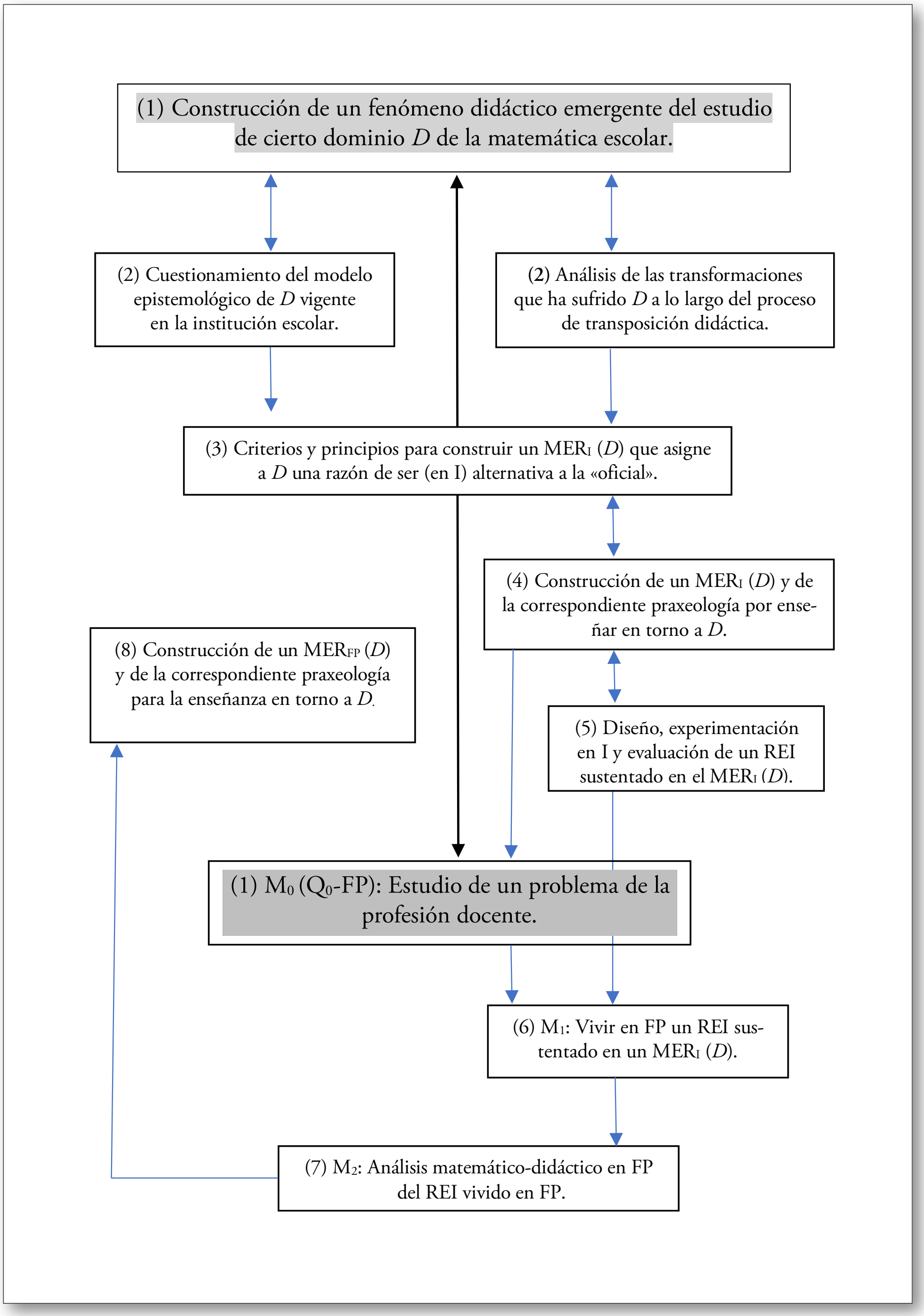


Fig. 1. Esquema de una estrategia para la formación del profesorado.

Nociones de la TAD utilizadas en este trabajo y principales abreviaturas

Praxeología matemática. Está formada por dos bloques inseparables que evolucionan conjuntamente: la *praxis*, que contiene los *tipos de tareas* y las *técnicas* matemáticas (en general no algorítmicas) útiles para llevarlas a cabo; y el *logos*, que es un discurso matemático razonado sobre la praxis que, a su vez, contiene dos niveles sucesivos de descripción, interpretación y justificación de la praxis, la *tecnología* y la *teoría* (Chevallard, 1992).

REI.	*Recorrido de estudio e investigación*. Es un proceso de estudio relativamente abierto que parte de una cuestión generatriz Q_0.
REI-FP.	*Recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado*. Es un proceso de formación generado por un problema docente Q_0-FP. Está estructurado en una serie de módulos. En este trabajo se describen los módulos M_0, M_1 y M_2.
SU.	*Institución escolar situada en el tránsito entre secundaria y la universidad.*
FP.	*Institución de formación del profesorado*.
CDE.	*Dominio de las matemáticas escolares en torno al cálculo diferencial elemental.*
MF.	*Dominio de las matemáticas escolares en torno a la modelización funcional*.
MEV_I (D).	*Modelo epistemológico vigente en la institución I en torno a cierto dominio* D *de las matemáticas*. Es una representación de la forma predominante al conceptualizar, interpretar y trabajar con los componentes praxeológicos (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías) del dominio D en una institución I. Para simplificar la notación, si no hay peligro de confusión, pondremos MEV en lugar de MEV_{SU} (MF).
MER_I (D).	*Modelo epistemológico de referencia en la institución I en torno a* D. Es una representación del dominio D, alternativa al MEV. Se construye desde la investigación didáctica como sistema de referencia para analizar el MEV y estudiar los fenómenos emergentes en la actividad matemática escolar sustentada en el MEV. Para simplificar la notación, pondremos MER en lugar de MER_{SU} (MF).

DESCRIPCIÓN DE LAS ETAPAS

En lo que sigue, resumiremos brevemente cada una de las etapas de esta estrategia y las relaciones entre ellas en el caso particular en el que el dominio *D* incluye el CDE y la MF. La primera parte de la estrategia, que comprende las etapas de (1) a (5) del esquema, tiene sentido en sí misma cuando se trata de construir únicamente una *praxeología matemática por enseñar* (por ejemplo, en SU). En cada una de las secciones indicaremos la etapa a la que se refiere según el esquema de la figura 1.

Dialéctica entre la formulación de un problema de la profesión docente y la toma en consideración de un fenómeno didáctico. Etapa 1

La estrategia de formación del profesorado parte de la constatación de un *problema de la profesión docente* que, inicialmente, es el problema relativo al diseño y gestión en la institución escolar SU de la enseñanza y el aprendizaje del CDE.

Simultáneamente, dicha estrategia se inicia con la toma en consideración de un *fenómeno didáctico* emergente en dicho dominio de la matemática escolar, detectado por la investigación didáctica y estudiado en Lucas (2015). Este fenómeno se manifiesta en la ausencia de un trabajo eficaz y práctico de *modelización funcional*, puesto que en SU se trata únicamente con modelos funcionales dados de antemano. Así se explica, en parte, el *aislamiento escolar de la MF respecto del CDE* y las dificultades del sistema educativo (y, por lo tanto, de los profesores) para integrar el estudio del CDE en una praxeología matemática *regional* en torno a la MF.

Este fenómeno didáctico tiene consecuencias «indeseables» desde la perspectiva de la TAD. Dichas consecuencias están relacionadas con el olvido escolar de la fuerte articulación y dependencia mutua entre el CDE y la MF a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas y en la práctica científica de los últimos siglos. La figura 2 esquematiza dicha dependencia.

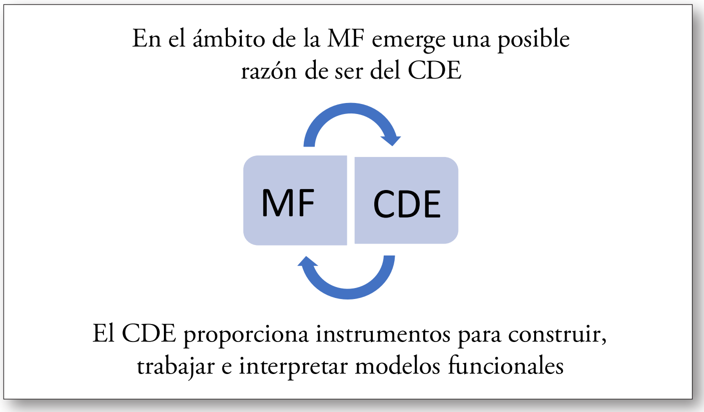


Fig. 2. Dependencia mutua entre la MF y el CDE.

Esta simultaneidad entre la constatación de un problema de la profesión docente relativo a un dominio de la actividad matemática escolar y la toma en consideración de un fenómeno didáctico emergente en dicho dominio no es casual. De hecho, la descripción de un problema docente constituye un componente importante de la base empírica para conceptualizar cierto fenómeno didáctico y, recíprocamente, la toma en consideración del fenómeno en cuestión permite replantear el problema docente como un verdadero problema de investigación didáctica. En nuestro caso, la formulación inicial del problema docente hacía referencia a la *enseñanza del CDE* y, gracias a la toma en consideración del fenómeno didáctico citado, hemos reformulado dicho problema en términos del papel que desempeña (y el que podría desempeñar) el CDE en el ámbito de la MF adecuadamente redefinida. Esta reformulación del problema es crucial y constituye otra de las principales aportaciones de nuestro trabajo.

El proceso de formación del profesorado que propone la TAD gira en torno a dicha simultaneidad (figura 1) y se encarna en un dispositivo de formación que denominamos *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (en adelante, REI-FP) que se estructura en un conjunto de módulos de trabajo (Ruiz-Olarría et al., 2019).

Cuestionamiento de la matemática escolar y caracterización del modelo epistemológico vigente en el tránsito de la secundaria a la universidad. Etapa 2

La formulación del citado fenómeno didáctico y el replanteamiento del problema docente asociado requieren el cuestionamiento de la organización matemática escolar en torno a la MF y, correlativamente, el análisis de las transformaciones que ha sufrido dicho dominio a lo largo del proceso de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991) con el fin de caracterizar el *modelo epistemológico vigente* en SU con respecto a la MF (en adelante, MEV). Para ello, deben plantearse cuestiones tales como:

> *¿Qué se entiende en SU por MF? ¿Qué papel se le asigna al CDE con relación a la MF? ¿Cuál es la razón de ser «oficial» que la institución escolar le asigna? ¿Qué actividades matemáticas se llevan a cabo en SU en las que aparezcan el CDE y la MF?*

Criterios para construir un modelo epistemológico de referencia. Etapa 3

El análisis del citado MEV y la clarificación de la razón de ser «oficial» que se asigna a dicho dominio en la matemática escolar aportan, con la ayuda de los instrumentos que proporciona la TAD, algunos criterios y principios necesarios para construir un *modelo epistemológico de referencia MER* que asigne una razón de ser alternativa (o, según el caso, complementaria) a la citada razón de ser oficial. La formulación de estos criterios y principios está basada, simultáneamente, en el análisis del fenómeno didáctico emergente en SU y en el estudio del problema de la profesión docente asociado. La nueva praxeología *por enseñar*, redefinida por el MER, explicita el papel que *podría desempeñar el CDE en el ámbito de la MF*. Los criterios y principios utilizados para construir el MER fueron los siguientes (Lucas, 2015, cap. III, pp. 90-92):

– Explicitar diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el CDE en estos.
– Tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y completar así el MER presentado en Ruiz-Munzón (2010).
– Como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, permitir que se parta de datos discretos y, por tanto, que se trabaje inicialmente con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.
– Si se parte de datos discretos, utilizar diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los continuos y poder así construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.
– Justificar y evaluar el proceso de aproximación de los modelos discretos (ecuaciones en diferencias finitas), mediante modelos continuos (ecuaciones diferenciales).
– Mostrar que, dependiendo de la naturaleza del sistema por modelizar, la aproximación por regresión sobre la *tasa de variación media*, TVM, o la *tasa de variación media relativa*, TVMR, proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.
– Poner de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más eficientes que las técnicas algebraicas de la matemática discreta.
– Construir y articular diferentes tipos de variación (tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas), definiendo el universo de tipos de variación que se considerar*á*n.
– Utilizar las técnicas del CDE para interpretar en términos del sistema el significado de los parámetros de un modelo funcional.
– Utilizar el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos de las variables que definen el sistema modelizado).
– En todos los casos, los procesos de MF se desarrollarán con el objetivo de dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente amplia planteada en términos de un sistema.

Construcción de un MER y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar en el tránsito de la secundaria a la universidad. Etapa 4

La estrategia de formación prosigue con la construcción efectiva de un MER a partir de los principios y criterios descritos en la etapa anterior, lo que comporta una redefinición de lo que se entiende en SU por «MF» y un replanteamiento de su relación con el CDE, así como de su posición curricular con respecto al resto de áreas de la matemática escolar. En consecuencia, el MER construido por la investigación delimita, reestructura y redefine una nueva *praxeología por enseñar* en torno a la MF en SU que difiere ampliamente de la praxeología por enseñar *oficial*.

En Lucas (2015), el MER se describió en forma de un *diagrama de actividad* en torno a la MF (figura 3). Así, se reformuló la noción de MF mediante un esquema detallado de los tipos de tareas matemáticas que componen los cuatro estadios del proceso de MF (Chevallard, 1989; Gascón, 2001).

El diagrama de la figura 3 está dividido en los cuatro estadios de dicho proceso, sin prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos.

Primer estadio: Delimitación o construcción del sistema por modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.

Segundo estadio: Construcción del modelo matemático y reformulación de las cuestiones iniciales en términos de los elementos del modelo.

Tercer estadio: Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.

Cuarto estadio: Aparecen nuevas cuestiones problemáticas cuyo estudio requiere llevar a cabo un nuevo proceso de modelización. Diremos que «el modelo se ha independizado del sistema inicial» y ha pasado a jugar el papel de un nuevo sistema, poniendo así de manifiesto el *carácter recursivo del proceso de modelización matemática*.

Además, el diagrama de actividad de la MF (fig. 3) está organizado en dos grandes campos: el *discreto* (parte superior) y el *continuo* (parte inferior). Así, cuando una determinada actividad (o tipo de tareas) está situada sobre la línea ecuatorial, significa que es una actividad de transición o que puede desarrollarse tanto en el campo discreto como en el continuo.

Diseño, experimentación y evaluación de un REI en medicina nuclear. Etapa 5

Una vez construida en el ámbito de la investigación didáctica una versión del MER que, no debe olvidarse, tiene el estatus de *hipótesis científica* que hay que contrastar experimentalmente, la estrategia que estamos describiendo continúa con el diseño, la experimentación y la evaluación en SU[1] de un REI sustentado en dicho MER. Este REI, que se materializa en un curso sobre CDE, parte de una cuestión generatriz Q_0 (figura 5) surgida en el ámbito de la medicina nuclear (Lucas, 2015).

El diseño, la experimentación y la evaluación de este REI han permitido mostrar que una posible razón de ser del CDE surge en el ámbito de la MF, apoyando así la verosimilitud de la *conjetura de Ruiz-Munzón*[2]. En esta experimentación se puso de manifiesto que el CDE no sirve únicamente para manipular y estudiar un modelo funcional dado de antemano, sino que constituye un instrumento esencial para *construir los modelos e interpretarlos en términos del sistema modelizado* (Lucas, 2015, sección 8.1, capítulo III). Los REI «vividos» en SU están constituidos por secuencias de tareas resultantes de una red progresiva de cuestiones y respuestas que permiten:

1. *Dar visibilidad escolar a la* MF en SU, condición imprescindible para justificar el estudio del CDE en dicha institución.
2. *Articular entre sí diferentes praxeologías* matemáticas que surgen habitualmente de forma atomizada (como, por ejemplo, la resolución de las ecuaciones diferenciales, el cálculo de primitivas, y la representación gráfica de funciones), mediante su integración en procesos de MF.
3. *Sobrepasar las limitaciones* de la actividad matemática escolar habitual en torno al estudio del CDE en el ámbito de la MF, descritas en Lucas (2015, cap. III).

1. La experimentación (que puede considerarse como una primera *contrastación experimental* de la hipótesis científica en cuestión) se llevó a cabo en un primer curso de Medicina Nuclear que asimilamos al tránsito de la secundaria a la universidad (SU). Es importante subrayar que los conocimientos sobre el CDE de estos estudiantes al ingresar en la universidad se limitaban al cálculo de derivadas.

2. Recordamos que dicha conjetura se formula abreviadamente como sigue: la «razón de ser» del CDE, esto es, las cuestiones problemáticas que dan sentido al estudio del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria, deberían situarse en el ámbito de la MF (Ruiz-Munzón, 2010).

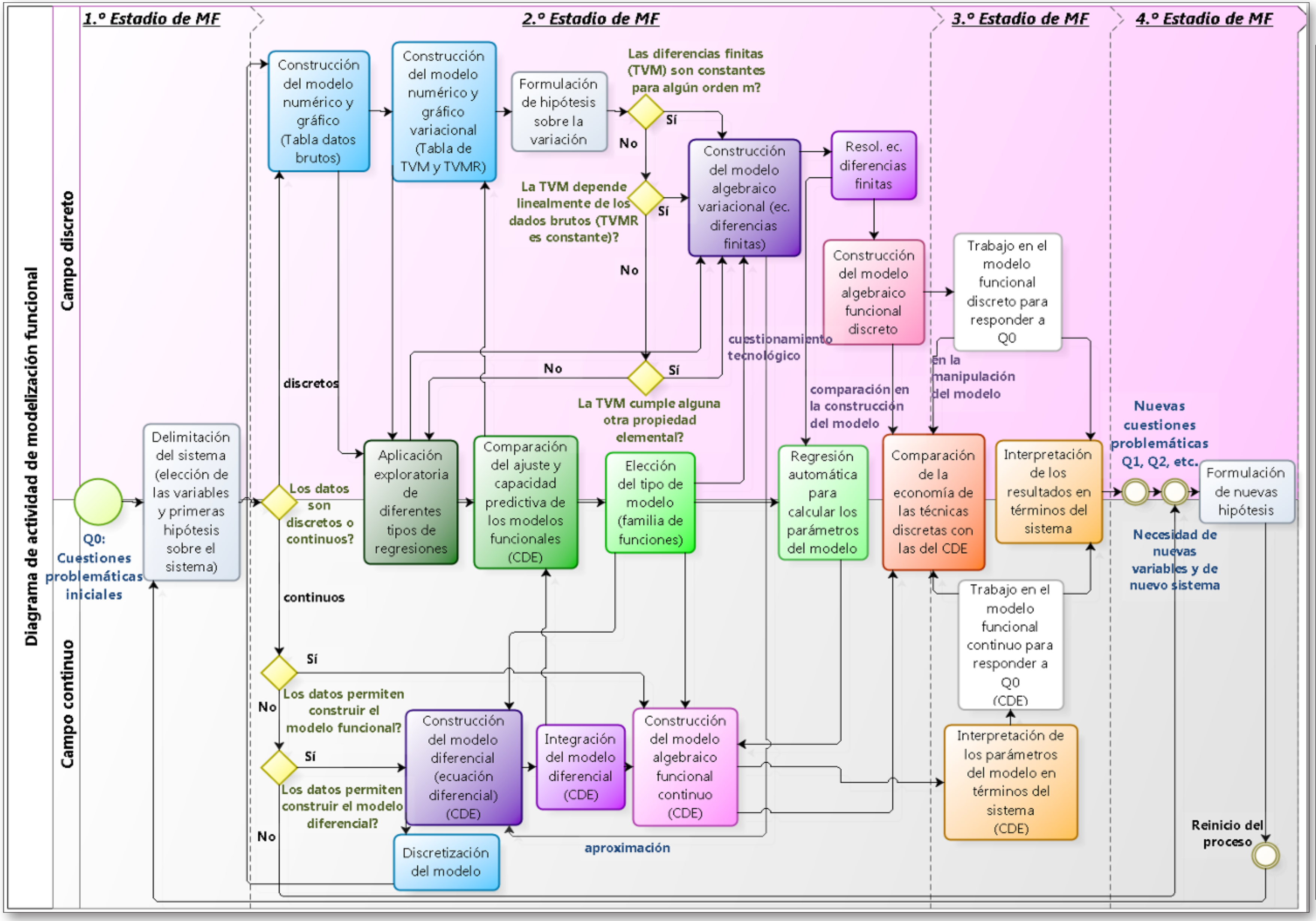


Fig. 3. Diagrama de actividad de la modelización funcional (Lucas, 2015).

La flexibilidad y versatilidad del MER esquematizado mediante un *diagrama de actividad* (figura 3) permite, en consonancia con la institución en que se trabaje, la exploración de todo el MER o de una parte de este.

Vuelta a la etapa 1: estudio de un problema de la profesión docente (Módulo M_0)

Es importante subrayar que el curso de formación del profesorado que describiremos a continuación no constituye una *experimentación* propiamente dicha. Le asignamos el estatus de *estudio exploratorio* con el objetivo de empezar a indagar las condiciones que se requieren y las dificultades que aparecen cuando se pretende fundamentar una estrategia de formación del profesorado en los resultados obtenidos en una investigación didáctica relativa a cierto dominio de la matemática escolar.

Una vez que se ha construido un MER y que se ha experimentado en SU un REI sustentado en este, la estrategia que estamos describiendo (figura 1) propugna utilizar la experiencia y los resultados de dicho proceso para diseñar un REI-FP cuyo objetivo sea posibilitar el estudio del *problema de la profesión* asociado. La formulación de este problema y las primeras etapas de su estudio se llevan a cabo en el módulo M_0 que surge de la cuestión generatriz Q_0-FP, que sintetizamos en los siguientes términos:

> Q_0-FP: *¿Qué enseñar y cómo enseñar con relación al CDE en el tránsito entre la secundaria y la universidad? ¿Qué papel desempeña (y cuál podría desempeñar) el CDE en el ámbito de la MF?*

La primera tarea que se propone para empezar a estudiar dicha cuestión profesional consiste en indagar cuál es la *respuesta que aporta la institución escolar* a esta y, paralelamente, qué otras posibles respuestas están disponibles en otras instituciones como son la investigación didáctica, la formación del profesorado, los libros de texto, los documentos que es posible encontrar en internet y publicaciones diversas. En el máster de Formación del Profesorado de Secundaria propusimos esta tarea a los profesores en formación en la asignatura Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas, en los cursos académicos 2019-2020 (de manera presencial) y 2020-2021 (en línea). En lo que sigue describiremos únicamente los principales rasgos del curso que se desarrolló en 2020-2021 a lo largo de ocho sesiones de ochenta minutos cada una y donde los dieciséis estudiantes matriculados trabajaron agrupados en cuatro grupos que se conformaron por decisión libre de sus miembros. Aproximadamente, el 50 % de los estudiantes eran graduados en matemáticas y el 38 %, graduados en Física, siendo el resto de distintas ingenierías. Los nacidos entre 1995 y 1998 suponían el 69 %, habiendo nacido el resto entre 1982 y 1992.

Los profesores en formación empezaron a estudiar la *respuesta que aporta la institución escolar* a la cuestión profesional Q_0-FP tomando como material empírico diversos libros de texto, documentos oficiales, currículos, pruebas de selectividad, etc. Los estudiantes disponían de un espacio en Moodle en el que reflejaban sus discusiones e iban anotando sus aportaciones, comentarios y conclusiones provisionales. La profesora intervenía en la plataforma, separadamente con cada uno de los grupos, formulando cuestiones sobre los resultados y las afirmaciones no debidamente justificadas. Esta plataforma constituyó el principal instrumento metodológico para recolectar los datos. El estudio culminó en la elaboración, por parte de cada grupo de trabajo, de un *informe* con las primeras respuestas a las citadas cuestiones y posterior *presentación* a la comunidad de estudio por parte del *secretario* del grupo (función que era rotativa entre sus miembros). Este ha sido el método de trabajo llevado a cabo a lo largo de todo el proceso de estudio.

El grupo que estudió el *currículo oficial* (Real Decreto 1105/2014) –que se puede considerar como una parte importante de la repuesta que ofrece la institución de Enseñanza Secundaria a la cuestión Q_0-FP– se centró en los ítems desgranados en los *contenidos* relativos al *Bloque Análisis* de los itinerarios de Ciencias y Humanidades y Ciencias Sociales. La conclusión manifestada al respecto fue la siguiente:

«se recopilan una gran cantidad de definiciones y fórmulas cuya utilidad y cuyo sentido difícilmente podrán comprender los estudiantes de secundaria».

Con relación a los *criterios de evaluación y estándares de aprendizaje* en los currículos de Ciencias Sociales y Humanidades, el grupo responsable de analizarlos concluyó: «aunque se plantea el uso de las funciones como modelos para el estudio de fenómenos sociales y económicos, estos procesos de modelización no se explicitan en absoluto, quedándose en buenas intenciones».

En cuanto a los resultados del análisis de los *libros de texto*, el grupo encargado de esta tarea advirtió en su informe la reiteración excesiva de ciertos tipos de ejercicios, concluyendo que: «el estudio escolar del tema del cálculo diferencial elemental está muy dirigido a preparar la prueba de ingreso a la Universidad».

El grupo encargado de buscar «respuestas» a la cuestión Q_0-FP en *artículos de divulgación y de investigación* –(Rueda et al., 2016; Rojas et al., 2014; Castro y Duarte, 2015)– subrayó que: «estos trabajos resaltan la importancia que tiene el docente para lograr la motivación del alumnado a través de un planteamiento equilibrado de teoría y práctica, el uso de las TIC y el trabajo en grupo».

Asimismo, destacan la relevancia que se pone en «enseñar a pensar, pero sin dar pautas de cómo llevarlo a la práctica en las clases».

Vivir en la institución de formación del profesorado el REI experimentado en la etapa 5 en el curso de Medicina Nuclear (Módulo M1). Etapa 6

En la etapa 1 se formuló un problema de la profesión docente y se empezó a analizar el fenómeno didáctico asociado. A lo largo de las etapas 2, 3 y 4 se fue construyendo un MER en torno a la MF (que da sentido al estudio del CDE), y en la etapa 5 se experimentó (en un curso de Medicina Nuclear) un REI sustentado en dicho MER.

En la etapa 6, que constituye el M_1 del REI-FP, se pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta propia a la cuestión Q_0-FP. Como primer paso, se proporciona a los profesores en formación la posibilidad de vivir en carne propia el REI experimentado en la etapa 5 en Medicina Nuclear (Lucas, 2015, cap. V, pp. 243-348). Se pretende que los estudiantes *construyan por sí mismos* una respuesta a la cuestión generatriz Q_0 de dicho REI:

> Q_0: *¿Cómo se puede diagnosticar y prever el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a Chernóbil?*

Se supone: 1) que esta respuesta contendrá en cierta forma la proporcionada previamente por los alumnos de SU a la misma cuestión (Lucas, 2015, cap. V, pp. 330-336); y 2) que el trabajo que desarrollarán los profesores en formación para elaborar esta respuesta les permitirá constatar, en vivo, la importancia y hasta la necesidad de utilizar el CDE como instrumento esencial para *construir y estudiar modelos funcionales*. Dicho brevemente, se postula que el trabajo para estudiar y responder a la cuestión Q_0 constituirá un primer paso esencial para que los profesores en formación construyan posteriormente una respuesta propia a Q_0-FP. Para desencadenar el estudio de Q_0 se proponen algunas cuestiones derivadas relativas al decaimiento de los isótopos radiactivos de xenón y de molibdeno.

Todos los grupos se apoyaron en la búsqueda en internet y la utilización de Excel y GeoGebra para la representación de datos y funciones. Con relación a la representación de datos discretos, utilizaron un software para obtener las aproximaciones funcionales o bien las dedujeron de las propias representaciones y las validaron buscando en la web información sobre el decaimiento de los radioisótopos. Ninguno de los grupos de profesores llegó a construir la ecuación en diferencias finitas que llevaría a obtener el modelo algebraico funcional del decaimiento de un isótopo radiactivo.

Los grupos 2 y 3 abordaron el estudio representando las respectivas gráficas de los valores dados de los radioisótopos y concluyeron que el decaimiento del xenón se aproxima por una función exponencial, identificando (erróneamente) el decaimiento del molibdeno con una función lineal decreciente (figura 4).

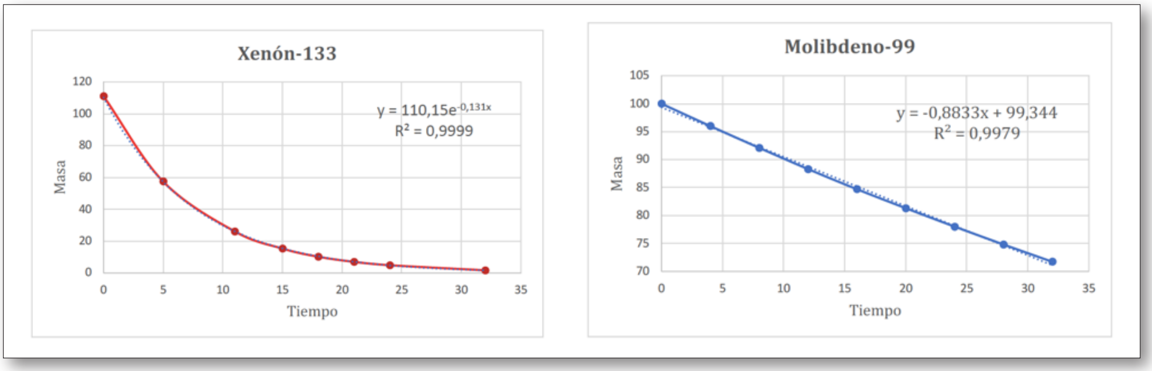


Fig. 4. Producciones del grupo 3.

Los grupos 1 y 4 encontraron en la web la expresión $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, que modeliza la desintegración de un isótopo radiactivo. En todos los casos, evitaron el trabajo con las tasas de variación media y relativa como herramientas para modelizar las desintegraciones de los radioisótopos. No es aventurado suponer que esta evitación se debe a la ausencia de un trabajo sistemático, tanto en el bachillerato como en los grados, de este tipo de datos discretos.

La última etapa del estudio, con la que se pretendía que cada grupo construyera su respuesta a Q_0, giró en torno a los datos numéricos proporcionados por la investigación sobre la incidencia del cáncer en las poblaciones más próximas a Chernóbil. Se les planteó la siguiente versión completa del problema (figura 5).

¿Cómo se puede prever a lo largo del tiempo el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a la antigua central ucraniana de Chernóbil, donde se produjo el accidente nuclear?

¿Que tipos de modelos funcionales podrían caracterizar este sistema?

El modelo que mejor se ajusta a los datos, ¿es el que mejor predice, necesariamente?

Podemos utilizar los datos empíricos proporcionados por investigaciones científicas (http://www.iaea.org/sites/default/files/chernobyl.pdf), como los de la tabla adjunta (la incidencia viene dada con relación a 100.000 habitantes).

AÑO	INCIDENCIA
0	0,1
1	0,5
2	0,3
3	0,45
4	1,3
5	2,8
6	3,5
7	4
8	5,2
9	4,95
10	5,5
11	5,2
12	5,9
13	7,1
14	6
15	6,1
16	7,85

Fig. 5. Enunciado del problema Q_0.

Utilizando Excel o GeoGebra, tres de los cuatro grupos obtuvieron aproximaciones polinómicas, logísticas o exponenciales a partir de los cinco primeros datos brutos (figura 6).

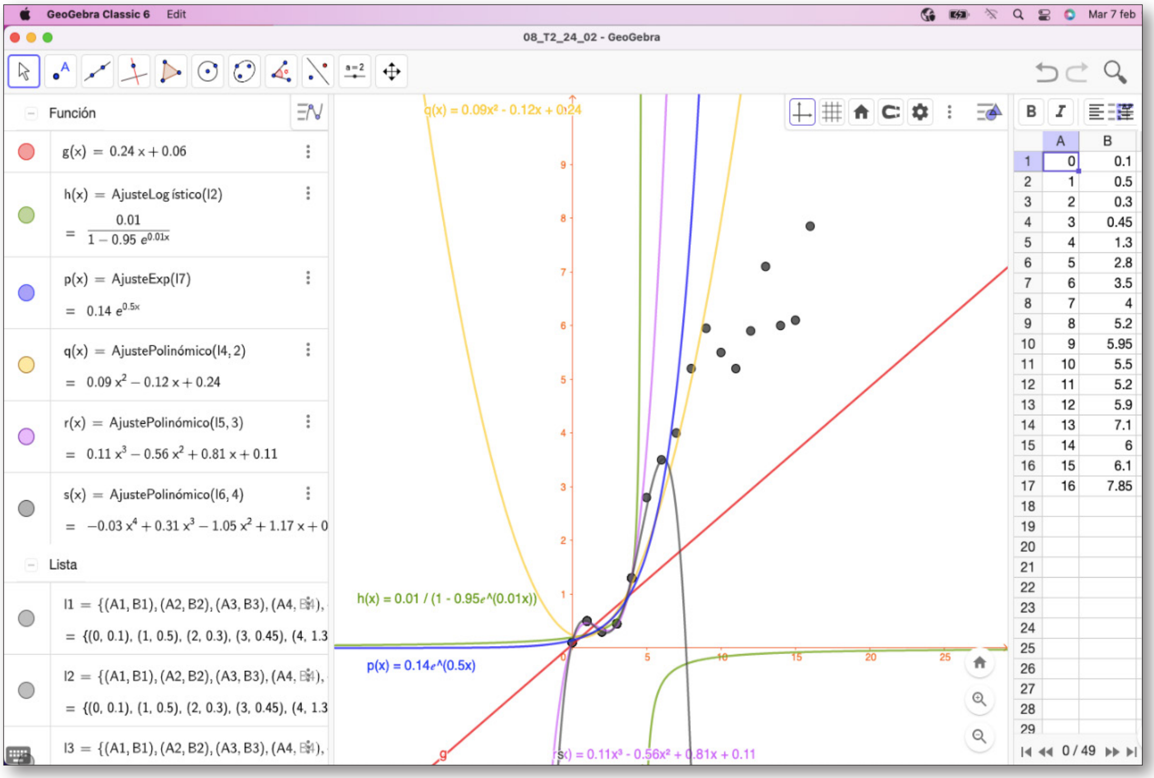


Fig. 6. Modelos funcionales obtenidos a partir de los cinco primeros datos brutos.

Tras un interesante debate sobre la interpretación de los resultados y la bondad de las aproximaciones, se llegó a la conclusión de que *el modelo que mejor se ajusta* a los cinco primeros datos *no es el que proporciona una mejor predicción* (figura 7).

Regresión	*Error de ajuste (cinco datos brutos)*	*Error de predicción (todos los datos)*
p: exponencial	0,14	216,19
h: logística	0,06	
g: lineal	0,17	2,11
q: polinómica (gr 2)	0,13	6,72
r: polinómica (gr 3)	0,01	152,70
s: polinómica (gr 4)	0	316,68

Fig. 7. Errores de ajuste y errores de predicción.

En este punto, y dado que ninguno de los modelos obtenidos por regresión sobre los datos brutos proporcionaba una buena predicción (figuras 6 y 7), la formadora propuso utilizar otras técnicas partiendo de la TVM y la TVMR, argumentando que un modelo funcional viene más caracterizado por el tipo de variación que define, que no por los valores que toma. Sin embargo, los resultados de los grupos utilizando las nuevas técnicas no fueron concluyentes debido, posiblemente, al tipo de sistema considerado.

Analizar el REI vivido (Módulo M_2). Etapa 7

En esta etapa, los profesores en formación retomaron el problema de la profesión docente descrito mediante la cuestión Q_0-FP, así como las respuestas parciales que habían encontrado en el módulo M_0. Estos datos, junto a la descripción de la respuesta a la cuestión Q_0 que figura en Lucas (2015), constituyeron la base empírica de la que disponían para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

En referencia al *análisis matemático* del REI vivido se propuso de nuevo comparar, en el caso de *otro sistema*, las aproximaciones obtenidas por regresión sobre los datos proporcionados por la TVMR con las que se obtienen cuando se parte de los datos brutos. Se trabajó con los datos relativos a la propagación de los efectos biológicos (genéticos) del accidente en las generaciones futuras y se constató por parte de los cuatro grupos, que los datos expresados mediante las TVMR resultaron los mejores para predecir los tres últimos valores de dichos efectos biológicos (figuras 8 y 9).

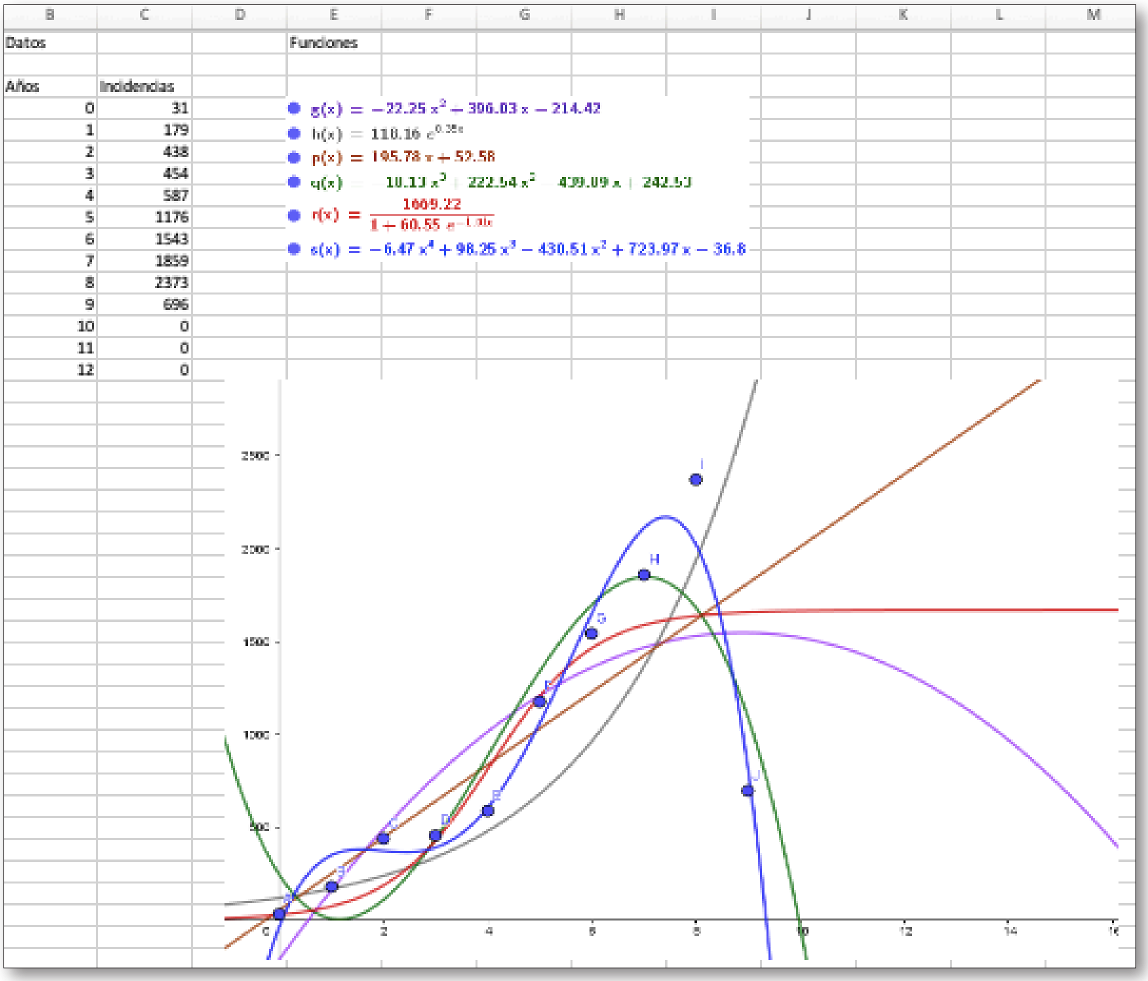
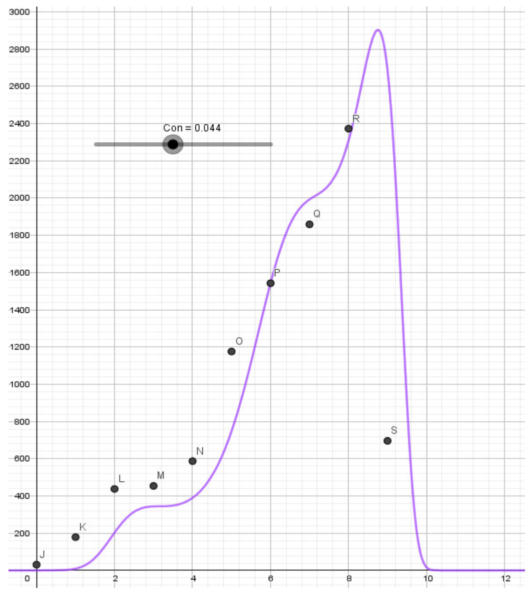


Fig. 8. Modelos funcionales obtenidos a partir de los datos brutos.

Año	Incidencia	TVM Incidencias	TVMR Incidencias
0	31		
1	179	148	4,774193548
2	438	259	1,446927374
3	454	16	0,03652968
4	587	133	0,292951542
5	1176	589	1,003407155
6	1543	367	0,31207483
7	1859	316	0,204795852
8	2373	514	0,276492738
9	696	-1677	-0,706700379
10	0		
11	0		
12	0		

Año	Ajuste de incidencias	Error de Ajuste	
0	0,044	30,956	
1	9,5579	169,4421	
2	203,0501	234,9499	Error medio de
3	344,4542	109,5458	Ajuste
4	389,8171	197,1829	335,93695
5	748,0016	427,9984	
6	1543,3916	0,3916	
7	1993,1701	134,1701	
8	2307,9599	65,0401	
9	2685,6926	1989,6926	
Año	Incidencias	Predicción del Ajuste	
10	0	16,8695	Media de error
11	0	0	de predicción
12	0	0	5,623166667



$$\mathbf{buena}(x) = 0.044\, e^{-0.0004x^7+0.0122x^6-0.1615x^5+1.0464x^4-3.2625x^3+3.3678x^2+4.3789x}$$

Este es, sin lugar a duda, el que mejor predice los datos a futuro

Fig. 9. Modelo funcional obtenido por el grupo 4 a partir de las TVMR.

Se observa que el modelo funcional de la figura 9 (gráfico inferior) se ajusta a los tres últimos datos cuyos valores son nulos. Estos valores no son predichos por ninguno de los modelos funcionales obtenidos a partir de los datos brutos (figura 8).

Con relación al *análisis didáctico* del REI vivido, algunos profesores en formación reconocen, finalmente, que la metodología de trabajo en grupo ha permitido la exposición de distintas perspectivas desde las que enfocar el estudio y la confrontación razonada, ayudando a profundizar la problemática abordada. Sin embargo, el estudio en grupo no ha estado exento de dificultades.

Mientras que algunos estudiantes consideran y valoran positivamente que el trabajo que han realizado ha sido relativamente autónomo, otros consideran que este «exceso» de autonomía les provocó cierta desorientación al principio del curso. Se pusieron así de manifiesto las dificultades para «equilibrar» el reparto de responsabilidades a lo largo del proceso de estudio.

La asunción de una metodología de trabajo que requería considerar todos los resultados como parciales y provisionales, sometidos a posibles modificaciones y rectificaciones, no fue fácil, puesto que chocaba con la cultura didáctico-matemática de los estudiantes.

Finalmente, los profesores en formación se mostraron algo confusos con relación a la forma de implementar (en su futuro trabajo como profesores) la respuesta a la cuestión Q_0-FP. Al final del curso, aunque con muchas dificultades, acabaron reconociendo que, más allá de dar una respuesta a dicha cuestión, el proceso de formación del que habían sido protagonistas perseguía que tomaran contacto con un método de trabajo diferente al usual, en el que se da gran libertad a los alumnos y se les sumerge en un proceso de indagación encaminado a encontrar respuestas de manera relativamente autónoma.

Construcción de una praxeología matemática para la enseñanza. Etapa 8

Más allá de los conocimientos matemáticos por enseñar, en la formación del profesorado (para la enseñanza del CDE y la MF en SU) deben estudiarse cuestiones cuyas respuestas aparecen como necesarias, o al menos útiles, para:

a) Delimitar la actividad matemática escolar en torno a la MF y seleccionar el tipo de modelos funcionales (discretos y continuos) que pueden construirse en SU.
b) Explicitar la razón de ser oficial que el MEV asigna en SU a la MF, el papel que desempeña el CDE y, en definitiva, los fines educativos que se pretenden en SU con su estudio.
c) Interpretar adecuadamente la razón de ser alternativa que el MER propone, así como los nuevos fines educativos asociados a esta redefinición de la MF.
d) Más allá de la MF, relacionar el CDE con los diferentes bloques o áreas de la matemática por enseñar y otros ámbitos de la vida científica, escolar y social.

Se trata de un conjunto de conocimientos, esencialmente «matemáticos», imprescindibles para que los futuros profesores tengan una visión matemático-didáctica que permita dar sentido al estudio del CDE en el ámbito de la MF en SU.

Además de estos conocimientos, que constituyen el núcleo de una praxeología matemática *para la enseñanza* (del CDE y la MF en SU) y que rebasan ampliamente los contenidos de la praxeología matemática *por enseñar* en SU, sería de esperar que en un curso de formación del profesorado de este tipo, y a partir de los datos proporcionados por el análisis matemático del REI vivido, los profesores en formación formularan nuevas cuestiones que comportasen el enriquecimiento progresivo de la praxeología matemática *para la enseñanza* mediante la construcción de nuevos modelos funcionales. Sin embargo, en el curso de formación que estamos describiendo, solo uno de los grupos propuso un desarrollo incipiente de un nuevo modelo (el logístico-continuo), lo que pone de manifiesto la existencia de ciertas *dificultades de origen matemático*. Consideramos que, en todo caso, los nuevos modelos funcionales que tiene sentido estudiar en cada curso de formación concreto deberían ser los propuestos por los propios profesores en formación.

El mecanismo general de dicha ampliación consiste en caracterizar un modelo funcional mediante el *tipo de variación* de la función que lo define y, por tanto, ampliar la clase de modelos funcionales *formulando nuevas hipótesis* (justificadas por la naturaleza del sistema y por los datos que se disponen de este) sobre el tipo de variación del sistema por modelizar.

En lugar de restringirse a un *universo de modelos discretos elementales* propios de SU (Lucas, 2015, sección 1.1, cap. IV), los profesores en formación podrían considerar modelos discretos más generales como, por ejemplo, el *modelo logístico discreto* que se obtiene al suponer que la *variación del sistema* se expresa mediante una función cuadrática de :

$$\Delta_n\, y = y_{n+1} - y_n = by_n\left(1+\frac{y_n}{b/k}\right)$$

Análogamente, entre los nuevos modelos continuos, podrían aparecer el *modelo logístico continuo* y el *modelo de crecimiento limitado*, entre otros.

A MODO DE SÍNTESIS: EL PROBLEMA DEL CAMBIO DE PARADIGMA DIDÁCTICO

El fenómeno didáctico[3] descrito (Lucas, 2015; Lucas y Gascón, 2019; Lucas et al., 2017) se manifiesta, entre otras cosas, en la ausencia de un trabajo matemático escolar eficaz dirigido a la construcción de modelos funcionales y en el uso casi exclusivo del CDE para estudiar las propiedades de diversos tipos estereotipados de funciones, lo que comporta el correspondiente aislamiento del CDE respecto de la MF y provoca enormes dificultades para situar la razón de ser del CDE en el ámbito de la MF. Este fenómeno es considerado «indeseable» desde la perspectiva de la TAD porque contradice algunas de sus asunciones básicas relativas a la naturaleza de la actividad matemática y a los fines que asigna a la educación matemática.

Se trata de un fenómeno didáctico que, como todos, condiciona el trabajo de la profesión docente, independientemente del grado en que los profesores sean conscientes de él. En última instancia, y dado que la problemática docente es el punto de partida de cualquier *estrategia* de *formación del profesorado*, es evidente que esta debe basarse, al menos en parte, en los resultados del estudio de los fenómenos didácticos.

En este punto, nos preguntamos: ¿cómo podría diseñarse y gestionarse una estrategia de formación del profesorado que soslaye las consecuencias «indeseables» (desde cierta perspectiva) del fenómeno didáctico que hemos descrito en torno al CDE y la MF? Una posible respuesta la proporciona Ruiz-Olarría (2015), que propone la estrategia general para la formación del profesorado descrita en este trabajo.

El estudio llevado a cabo en Lucas (2015) sugiere la necesidad de un cambio del *paradigma didáctico vigente* (Gascón y Nicolás, 2021a) en SU en torno a la MF, esto es, un cambio del MEV en la dirección marcada por el MER y, correlativamente, una transformación de los *fines educativos* asociados. Estos cambios comportarán modificar los *medios didácticos vigentes* en SU para poner en marcha otros medios que sean útiles para alcanzar los nuevos fines (Gascón y Nicolás, 2017).

Surge así, con fuerza, el problema del *cambio de paradigma didáctico vigente* en una institución escolar. Mientras que en el nivel experimental es posible poner en marcha *localmente* la nueva modalidad de estudio de la MF, basada en un MER alternativo al MEV, tal como se ha puesto de manifiesto en Lucas (2015), para que fuese posible hacerlo a nivel global sería preciso que la comunidad educativa decidiese que ciertos fines educativos son más valiosos que otros y que ciertos fenómenos didácticos deben ser evitados. Se requeriría, además, que dicha comunidad aceptase (y fuese capaz de) poner en marcha unos medios didácticos que podrían ser muy diferentes a los habituales. En definitiva, si se pretende un cambio de paradigma a gran escala (más allá de las experimentaciones locales) sería preciso, además, controlar su impacto sobre la educación matemática en SU globalmente considerada. Nada nos asegura que la nueva forma de conceptualizar la MF y sus nuevas relaciones con el resto de los dominios de la matemática escolar, los nuevos fines educativos asociados al estudio de la MF en SU, así

3. Interpretamos un *fenómeno didáctico* como un conjunto de hechos relacionados con el estudio que se repiten regularmente en determinadas circunstancias y en diferentes instituciones. Se trata de hechos que son, desde cierta perspectiva, sorprendentes y hasta asombrosos, por lo que parecen requerir una explicación (Mosterín y Torretti, 2010).

como los nuevos medios didácticos que se requieren, sean *ecológicamente compatibles* con la educación matemática vigente en SU globalmente considerada (Gascón y Nicolás, 2021b).

Dado que en la institución de FP no existe actualmente una forma asumida y compartida de interpretar el estudio de la MF ni, por tanto, un MEV_{FP} (MF), tal como pone de manifiesto el análisis del contenido de los programas de la asignatura Complementos de Formación Disciplinar, que se imparte en el máster de Formación del Profesorado en las diferentes universidades españolas (Ruiz-Olarría, 2015, cap. 1, sección 3), proponemos iniciar los cambios instaurando en la institución de FP la praxeología para la enseñanza en torno a la MF elaborada según la estrategia esquematizada en la figura 1.

Sin embargo, el diseño y la gestión de este tipo de cursos de formación del profesorado no deja de plantear, como hemos visto, dificultades debidas, entre otros factores, a las incompatibilidades entre la cultura didáctico-matemática de los profesores en formación y el nuevo paradigma didáctico que se pretende instaurar. En nuestro caso, han aparecido incomprensiones y conflictos relacionados con: la forma de articular el trabajo en grupo; el reparto de responsabilidades entre los diferentes miembros de la comunidad de estudio; la graduación y la asunción progresiva de la autonomía de los estudiantes; la adopción de una metodología de trabajo que no considera ningún resultado como definitivo; la forma como los estudiantes deberían implementar la respuesta construida a la cuestión Q_0-FP en su futuro trabajo como profesores; y la utilización de los conocimientos matemáticos de los estudiantes para ampliar la praxeología matemática por enseñar.

En resumen, podemos afirmar que el objetivo (parcial) asignado al estudio exploratorio, implementado en la institución de formación del profesorado, se ha alcanzado en un grado relativamente alto, ya que que hemos puesto de manifiesto algunas condiciones que se requieren y, sobre todo, hemos detectado las principales restricciones que dificultan dicha estrategia de formación. Para seguir profundizando en el análisis de estas restricciones y en su posible superación, será necesario replicar este *estudio exploratorio* con otros grupos de profesores, en otras instituciones y basándolo en la investigación didáctica relativa a diferentes dominios de la matemática escolar.

Para concluir, y en lo que se refiere al objetivo global de este trabajo, consistente en mostrar una forma concreta de utilizar los resultados de la investigación didáctica como base para el diseño de una estrategia de formación del profesorado, consideramos que los logros obtenidos son muy prometedores, aunque limitados, y sugieren que podrían reproducirse en otros dominios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos: PID2021-126717NB-C31, PID2021-126717NB-C32 y PID2021-126717NB-C33.

REFERENCIAS

Alanís, J. A. y Soto, E. (2012). La integral de funciones de una variable: Enseñanza actual. *El Cálculo y su Enseñanza*, *3*, 1-12. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/135

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Kluwer Academic Press.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-262.

Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.) (1992). *Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus*. ICME 7. Université de Sherbrooke.

Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Information Age Publishing.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp. 1-32). American Mathematical Society.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 39-52. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

Bravo, A. S. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, *24*(2), 5-36.

Bustos Tiemann, C. y Ramos Rodríguez, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. *Innovaciones Educativas*, *24*(36), 84-100.
https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6*(2), 133-154. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092478

Castro, F. y Duarte, O. (2015). La enseñanza problémica como estrategia didáctica para el aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial. *RECME*, *1*(1), 172-177. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications n.º 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*: du savoir *savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. y Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). INRP.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 265-286.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, *25*.

Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un esquema de derivada. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *21*, 23-44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159. https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/145232

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, *37*(3), 9-13.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021a). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática*, *33*(1), 7-40. https://doi.org/10.24844/EM3301.01

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021b). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *20*, 23-39. https://aiem.es/article/view/v20-aascon-nicolas/4033-pdf-es

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva* [Tesis de doctorado]. Universidad de Sevilla. https://idus.us.es/handle/11441/53328

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 115-141.

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). Kluwer Academic Press.

Lucas, C., Gascón, J. y Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

Lucas, C. y Gascón, J. (2019). Las tres dimensiones del problema didáctico del cálculo diferencial elemental. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *16*, 40-56. https://doi.org/10.35763/paiem.v0i16.277

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis de doctorado]. Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo, España. http://www.investigo.biblioteca.uvigo.es/xmlui/handle/11093/542

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, *3*. https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con

Mosterín, J. y Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza Editorial.

Rojas, S., Suárez, S. y Parada, S. (2014). Presaberes matemáticos con los que ingresan estudiantes a la universidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1169-1176).

Rueda, J., Parada Rico, S. y Fiallo Leal, J. (2016). Potenciando habilidades mediante un curso de precálculo dirigido a estudiantes de primer ingreso a la Universidad. *Revista Colombiana De Matemática Educativa*, *1*(1b), 148. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/242

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Tesis de doctorado]. Universitat Autònoma de Barcelona. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* [Tesis de doctorado inédita]. Universidad Autónoma de Madrid.

Ruiz-Olarría, A., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). Construcción de praxeologías para la enseñanza en la institución de formación del profesorado, *Educación Matemática*, *31*(2), 132-160. http://doi.org/10.24844/EM3102.06

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&tlng=es

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2661174

Schwarzenberger, R. y Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44-49.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII*, *3* (pp. 151-158).

Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer Academic Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75-87. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894008

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2015). Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 157-171. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1520

Trigueros, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*. An overwiew of ATD (pp. 77-116). Centre de Recerca Matemàtica.

Vega Urquieta, M. A., Carrillo, J. y Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 403-429.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20

A Strategy for Teacher Education: The Case of Elementary Differential Calculus

Catarina Oliveira Lucas
Instituto Politécnico Gaya. ISPGAYA. Portugal
clucas@ispgaya.pt

Alicia Ruiz-Olarría
Departamento de Didácticas Específicas. UAM. España
alicia.ruiz@inv.uam.es

Josep Gascón Pérez
Departamento de matemáticas. UAB. España
josepgasconperez@gmail.com

Every teaching institution constructs, in action, a notion of *study*, i. e. it assumes a way of interpreting the knowledge at stake, privileges certain aims of education and advocates some didactic means which are supposedly useful for achieving these aims. In short, it constructs an outline of a *didactic paradigm*, a particular type of *mode of study* that is difficult to modify, since it is a cultural construction that crystallizes over time and is conditioned by all kinds of factors. Moreover, the type of training of prospective mathematics teachers in this institution is usually traditionally coherent with this joint interpretation of mathematics and mathematics education and ends up shaping a shared culture that evolves in line with the dominant ideology. First, the question arises as to the role that the results of didactic research could play in the possible evolution of this culture in a given direction.

To answer this question, the starting point of this paper is an investigation on a didactic phenomenon, described in Lucas (2015), which manifests itself in the almost exclusive use of *elementary differential calculus* (EDC) to study the properties of different stereotyped functions and, above all, in the absence of school mathematical work that uses the tools of EDC to construct functional models of systems of all kinds (physical, biological, economic, mathematical, etc.) and thus be able to answer the questions posed by the terms of the systems. The analysis of this didactic phenomenon provides us with a representation of the didactic paradigm in force around EDC in the transition from secondary school to university. This paradigm has «undesirables» consequences from the perspective of the *anthropological theory of the didactic* (ATD), in which this study is based, because it contradicts some of its basic assumptions regarding the nature of mathematical activity and the purposes that ATD assigns to mathematics education.

The results of this research suggest that, in order to avoid the aforementioned «undesirables» consequences and give meaning to the study of EDC, we must situate it in the field of *functional modelling*, and that this new way of interpreting EDC will require a change in the current didactic paradigm (Gascón & Nicolás, 2021). We propose, as a first step, to design and experiment a teacher training modality based on the general training strategy proposed in the work of Ruiz-Olarría (2015).

The implementation of this training process has allowed us to show that it is possible to use the results of didactic research to propose directions for changing the current didactic paradigm, always from the perspective of a certain didactic theory. Likewise, the implementation of a teacher training modality based on the aforementioned research results has revealed the conditions required and the restrictions that arise in the management of this type of course due, among other factors, to the incompatibilities between the didactic-mathematical culture of the teachers in training and the new didactic paradigm that is intended to be established.