

REFERENCIA: Lupiáñez, J.L., Puig, L. & González-Calero, J.A. (2015). Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 30(1). Enlace web: <http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos> - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

## **PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

### **NUMERICAL AND ALGEBRAIC THINKING AND HISTORY OF MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION**

**José Luis Lupiáñez**

Universidad de Granada

**Luis Puig**

Universidad de Valencia

**José Antonio González-Calero**

Universidad de Castilla-La Mancha

#### **Resumen:**

La constitución de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) trajo consigo la creación y consolidación de varios grupos de investigadores que vienen abordando sistemáticamente problemas de indagación relacionados con la Didáctica de la Matemática. Dos de esos grupos son “Pensamiento Numérico y Algebraico” e “Historia de las Matemáticas y Educación Matemática”. En este monográfico recogemos varios de los trabajos de investigación, que sobre esas dos temáticas, se presentaron en una reunión científica celebrada en Albacete en 2015.

#### **Palabras clave:**

Investigación en Educación Matemática, Pensamiento numérico y algebraico, Historia de las Matemáticas

#### **Abstract:**

The incorporation of Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM) brought about the creation and consolidation of several specialized research groups. These groups have continuously tackling problems related to Mathematics Education. Two of these groups are “Numerical and Algebraic Thinking” and “History of Mathematics and Mathematics Education”. Focused in these two topics, in this issue we show some of the research reports presented in a scientific meeting held in Albacete in 2015.

#### **Keywords:**

Research in Mathematics Education, Numerical and algebraic thinking, History of Mathematics

Las matemáticas constituyen una disciplina que a lo largo de su historia, además de su propio desarrollo, ha dado respuesta a necesidades sociales y científicas en todas las civilizaciones, lo que confiere un papel preponderante en la tradición cultural de nuestra sociedad. Su propia naturaleza, sus características esenciales y las nociones y estructuras que las conforman, contribuyen de manera singular a la formación de las personas y al desarrollo de sus facultades, así como al cultivo de su carácter. Además, las matemáticas proporcionan herramientas para el desarrollo de la actividad laboral y para el ejercicio profesional, por lo que constituyen instrumentos de preparación y formación para la ciudadanía (Rico y Lupiáñez, 2008). Estas características esenciales hacen que las matemáticas sean parte estructural de la educación escolar. La educación matemática proclama como principio que todos los ciudadanos deben alcanzar, por medio de las matemáticas, el máximo desarrollo posible de todas sus competencias, individuales y sociales, intelectuales, culturales y emocionales.

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM<sup>1</sup>), se constituyó en 1996 con la finalidad de consolidar, fundamentar y difundir la investigación española en esta área. Entre sus objetivos destacan los siguientes:

- Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática, donde plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos.
- Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas.
- Promover el impulso a la Educación Matemática en los organismos e instituciones relacionados con la investigación.
- Promover la participación en las convocatorias de ayudas a la investigación, institucionales y privadas. Contribuir y participar en el desarrollo, evaluación y aplicación de investigaciones en Didáctica de la Matemática.
- Contribuir a la presentación de resultados de investigación en los foros, encuentros y revistas de Educación Matemática.
- Mantener contactos y promover la colaboración con grupos de investigación en Educación Matemática.
- Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
- Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la Sociedad.

El segundo objetivo, establece la importancia de constituir grupos especializados de investigación en los que abordar estudios específicos. Dos de los grupos organizados

---

<sup>1</sup> [www.seiem.es](http://www.seiem.es)

dentro la SEIEM son los de “Pensamiento Numérico y Algebraico” e “Historia de las Matemáticas y Educación Matemática”.

El estudio de las estructuras numéricas y las relaciones algebraicas, fundamentos básicos de las matemáticas y del lenguaje matemático, son el núcleo del primer grupos. Entre el conocimiento numérico y el algebraico hay una multiplicidad de vínculos que los miembros de la SEIEM quieren destacar con la constitución del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. Los problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje en estos dos campos son similares y las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes. Algunas de las líneas de indagación prioritarias de este grupo son los fundamentos de los conjuntos y estructuras numéricas, los sistemas de representación, los procesos de aprendizaje y comprensión de cada estructura numérica y los modos con que los escolares interpretan y, en su caso, responden a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas cuando los abordan mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica. También se exploran cuestiones relacionadas con el significado y el manejo del lenguaje algebraico, el aprendizaje y las dificultades en el trabajo con relaciones y expresiones algebraicas como identidades, ecuaciones o sistemas, sobre el uso de tecnologías para la enseñanza del álgebra o sobre el pensamiento matemático avanzado.

El grupo Historia de las Matemáticas y Educación Matemática se constituyó para ser un foro de discusión y presentación de trabajos en el que tengan cabida estudios que se planteen cualquiera de las relaciones y los usos de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática en la ámbito de la investigación. Tanto estudios de historia de las matemáticas hechos desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, en el sentido de que es la problemática de la investigación en didáctica de las matemáticas la que determina qué textos se buscan en las historia de las matemáticas y qué preguntas son las que se pretende contestar en su estudio (Puig, 2011), como estudios de historia de la educación matemática. Tanto estudios en los que lo que se encuentra en los textos históricos se usa para elaborar secuencias de enseñanza, como estudios en que se usa para examinar las actuaciones de los alumnos desde el punto de vista de lo observado en la historia, o también estudios en los que se usa para la determinación de elementos de la competencia en un dominio de las matemáticas.

Con estos antecedentes, los días 19 y 20 de febrero de 2015 estos dos grupos de la SEIEM celebraron un seminario conjunto en la Facultad de Educación de Albacete de la Universidad de Castilla-La Mancha. Durante el mismo, se presentaron 14 comunicaciones, que finalmente dieron lugar a la presentación de los ocho artículos que constituyen el presente monográfico. A continuación resumimos brevemente su contenido.

En el monográfico se presentan dos trabajos encuadrados en la línea de investigación del grupo de Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. Por un lado, Madrid, Maz-Machado y López presentan un trabajo con título “Fenomenología y representaciones en El Dorado Contador de Miguel Gerónimo de Santa Cruz” que examina los distintos sistemas de representación y fenómenos presentes en la obra *El Dorado Contador*. Sirva como muestra de la relevancia de esta obra, y por tanto del

interés de estudios sobre ella, el hecho de que esta aritmética tuviera múltiples reimpresiones, la última dos siglos después a su primera edición. El análisis de contenido realizado revela que las representaciones verbales constituyen el sistema de representación imperante en la obra, combinándose con representaciones numéricas y, en menor frecuencia, con representaciones gráficas. Desde el punto de vista fenomenológico, el análisis indica que en la aritmética se pueden encontrar hasta nueve categorías de fenómenos o situaciones diferentes; la mayoría vinculadas a las relaciones comerciales.

El segundo artículo en Historia de las Matemáticas y Educación Matemática corresponde a León y Maz-Machado se centra en la figura del ingeniero Juan Cortázar, cuyos tratados fueron usados como libros de textos en secundaria durante décadas. Los autores presentan un estudio descriptivo-exploratorio de la vida y obra del ingeniero bilbaíno, empleando técnicas de análisis de contenido para el estudio de los libros de texto. La investigación de León y Maz-Machado pone de manifiesto la relevancia de las obras de Juan Cortázar. A su vez, señalan el propósito del autor de modernizar la enseñanza de las matemáticas y como en sus tratados plasmó conocimientos matemáticos y didácticos adquiridos fruto de sus estancias en Francia e Inglaterra.

El monográfico presenta tres artículos que relatan investigaciones con estudiantes para maestro e indagan en sus conocimientos matemáticos o/y didácticos. Así, Martínez, González-Calero y Sotos presentan un trabajo cuyos objetivos son analizar la competencia en la resolución de problemas verbales que involucren los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.), así como evaluar la influencia de las palabras clave *máximo* y *mínimo* en el enunciado. El artículo se centra en una etapa de la investigación de corte cuantitativo y en la que tomaron parte 127 estudiantes para maestro. El estudio revela serias dificultades por parte de los estudiantes para maestro en la toma de decisiones sobre qué elemento, el m.c.m. o el m.c.d., involucrar en la resolución de un problema verbal. Adicionalmente, los autores indican que las palabras clave *máximo* y *mínimo* no inducen al uso del m.c.d. y m.c.m., respectivamente. Asimismo, se reconoce la necesidad de estudios complementarios de corte cualitativo para dar sentido a las actuaciones de los estudiantes y abordar integralmente los objetivos propuestos en la investigación.

En el segundo de estos estudios con estudiantes para maestro, Ivars y Fernández abordan el papel de las narrativas en el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010). En concreto, realizaron un análisis de narrativas realizadas por estudiantes durante su período de prácticas en centros de Educación primaria. La investigación indica que las narrativas pueden constituir un instrumento útil a la hora de que los estudiantes establezcan conexiones entre fenómenos acontecidos en el aula y sus conocimientos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que el trabajo señala el potencial de las narrativas en relación al desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático*, los autores reconocen la complejidad de establecer vínculos entre los conocimientos teóricos y las situaciones prácticas del aula, así como la lógica influencia de la instrucción previa de los estudiantes para maestro en la calidad de las narrativas producidas.

El artículo de Buforn y Fernández también examina la competencia *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático aunque, en este caso, centrándose en el razonamiento *up and down*. Este razonamiento implica la coordinación de la capacidad de reconstruir la unidad y la representación de una fracción de esta unidad (Steffe y Olive, 2012). Buforn y Fernández analizan cómo 92 estudiantes para maestros identifican evidencias de razonamiento *up and down* en una tarea resuelta por estudiantes de Educación primaria. El análisis realizado da lugar a una categorización de los estudiantes para maestro en diferentes perfiles atendiendo a dos variables: la capacidad para identificar los elementos matemáticos del razonamiento *up and down* y la capacidad para reconocer estos elementos en las producciones de los estudiantes de primaria. Los resultados muestran cómo aquellos estudiantes para maestro capaces de identificar los elementos matemáticos, son más competentes a la hora de evaluar la comprensión de los estudiantes de primaria sobre la tarea. Aquellos estudiantes para maestros incapaces de explicitar los elementos matemáticos, evidencian una tendencia a analizar las resoluciones de los estudiantes de primaria realizando descripciones generales de las producciones o interpretando la corrección o no de las mismas. Los resultados señalan el interés de una posible inclusión en los programas de formación inicial del profesorado de una instrucción ligada al desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático.

El papel de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se refleja en el monográfico en el trabajo de Gutiérrez-Soto, Arnau y González-Calero, quienes exploran el impacto de un videojuego en el aprendizaje de las manipulaciones algebraicas. En concreto, analizan cómo el uso del software *DragonBox Algebra*<sup>®</sup> por parte de estudiantes de 17-18 años de un Programa de Cualificación Profesional Inicial impacta en su competencia para la resolución de ecuaciones algebraicas. Este trabajo se ubica en una prolífica línea de investigación que estudia el uso de juegos electrónicos para generar aprendizaje aprovechando las potencialidades de éstos, especialmente en relación con la motivación de los estudiantes. *DragonBox Algebra*<sup>®</sup> es un videojuego donde cada pantalla o nivel puede ser interpretado como una representación de una ecuación algebraica y donde las acciones que el usuario realiza sobre la pantalla para ganar pueden ser identificadas con las manipulaciones algebraicas necesarias para resolver dicha ecuación. El trabajo estudia en qué medida puede considerarse el software como un modelo mediador apropiado para el aprendizaje formal de las manipulaciones algebraicas. Los resultados señalan un aumento estadísticamente significativo de la competencia en la resolución de ecuaciones en lápiz y papel. No obstante, los autores reconocen la necesidad de estudios complementarios dado el bajo número de participantes en la investigación así como por la conveniencia de incluir un grupo de control en el diseño experimental. A pesar de estas limitaciones, este artículo plantea oportunidades de aprendizaje en dominios que podrían ser considerados poco motivadores para el estudiante como el de los rudimentos del lenguaje algebraico.

Finalmente, el monográfico se completa con dos artículos centrados en la resolución de problemas. El primero de ellos, obra de Sánchez, Arnau y Arevalillo-Herráez, evalúa la influencia de una retroalimentación basada en el nombre de cantidades en vez de en su valor en la enseñanza de la resolución aritmética de problemas verbales de fracciones haciendo uso de un sistema tutorial inteligente. En la experimentación tomaron parte

42 estudiantes de 2º curso de Educación secundaria, divididos en un grupo experimental y un grupo de control. El grupo experimental siguió una secuencia de enseñanza sobre un sistema tutorial inteligente en el que resolvían problemas y la retroalimentación que ofrecía el sistema se refería a las cantidades mediante un nombre y su valor. El grupo de control realizó una secuencia de enseñanza con los mismos problemas y haciendo uso de una calculadora científica. El efecto de las diferentes instrucciones fue medido mediante la comparación de un test previo y uno posterior a las intervenciones. Los resultados indicaron un incremento estadísticamente significativo en las puntuaciones entre la prueba final y la inicial en ambos grupos. Sin embargo, a pesar de que este incremento fue superior en el grupo experimental, no se constató diferencias estadísticamente significativas en la comparación entre grupos. Este enfoque cuantitativo fue complementado con un estudio cualitativo en la que se grabó dos parejas de cada grupo resolviendo problemas verbales de fracciones. El análisis de estas filmaciones no reveló un incremento de las referencias a cantidades mediante su nombre en aquellas parejas que habían sido instruidas con el sistema tutorial. Una conclusión relevante del trabajo apunta a que designación oral de las cantidades durante la resolución no parece estar ligada a la competencia para completar la etapa que los resolutores estén acometiendo.

El monográfico se completa con el artículo de Sanz y Gómez, que constituye un análisis teórico de problemas verbales de fracciones cuya estructura matemática se corresponde con una sucesión de fracciones. Los autores exponen los resultados de un análisis racional e histórico epistemológico de esta familia de problemas a partir del cual los autores identifican diferentes subtipos de problemas dentro de esta familia. Las categorías de problemas identificadas se denominan de manera altamente descriptiva: (i) problemas de quitar fracciones “de lo que queda” del todo desconocido, (ii) problemas de quitar un número y una fracción a un todo desconocido, (iii) problemas de quitar y reponer a un todo desconocido, y (iv) problemas de quitar fracciones más enteros a un todo desconocido siendo el reparto equitativo. Sanz y Gómez, apoyándose en un estudio de las lecturas algebraicas de estos problemas, presentan una descripción de las peculiaridades y dificultades que pueden caracterizar cada subtipo de problemas, identificando en cada caso lo que los autores denominan *componentes críticas* y que definen como aquellos elementos o información del enunciado cuya identificación hacen posible la resolución del problema. Los autores señalan la necesidad de estudios experimentales para evaluar las estrategias y dificultades de los estudiantes en la resolución de estos problemas. En último término, esta línea de trabajo aspira a desarrollar de una enseñanza apropiada para este dominio de problemas.

### Referencias bibliográficas

- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.
- Puig, L. (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In V. Katz and C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Steffe, L. y Olive, J. (2012). *Childrens' Fractional Knowledge*. London: Springer.