



Modelización matemática en educación primaria: el brazo hidráulico

Mathematical modeling in elementary education: the hydraulic arm

Elisa Salcedo Talamantes, Angelina Alvarado Monroy, María José Aviña González
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango
elisa.salcedo@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx, mjavina@ujed.mx

RESUMEN • El objetivo es mostrar el aprendizaje interdisciplinario con alumnos de primaria mediante una actividad donde la modelización es un vehículo para su desarrollo. El marco de referencia integra la perspectiva de modelos y modelización para lograr la concepción y refinamiento del diseño en ciclos iterativos. La presentación del contexto incluyó la interacción con un brazo hidráulico. Los resultados muestran que los alumnos, aun aquellos con barreras de aprendizaje, construyen modelos utilizando distintos medios de representación, para exhibir comprensión del mecanismo, realizar medición de ángulos y distancias, e incluso aproximaciones a la variación lineal. La actividad es innovadora dada la interdisciplinariedad que da lugar a una práctica científica basada en modelos, donde se experimenta con un prototipo de bajo coste que permite la inclusión de todos los alumnos.

PALABRAS CLAVE: Modelización; Diseño instruccional; Educación primaria; Interdisciplinariedad.

ABSTRACT • The objective is to show interdisciplinary learning with elementary school students through an activity where modeling is a vehicle for its development. The reference frame integrates models and modeling perspective to achieve the conception and refinement of the design in iterative cycles. The presentation of the context included interaction with a hydraulic arm. The results show that students, even those with learning barriers, build models using different means of representation to show understanding of the mechanism, measure angles and distances, and even approximations to linear variation. The activity is innovative due to an interdisciplinarity which results in a scientific practice based on models in which students experiment with a low-cost prototype that makes the inclusion of all students possible.

KEYWORDS: Modeling; Instructional design; Elementary education; Interdisciplinarity.

Recepción: junio 2020 • Aceptación: febrero 2021

RELEVANCIA DEL TRABAJO

La tendencia en educación matemática en secundaria es hacia la construcción de conocimiento integrado que permita a los alumnos enfrentarse a situaciones reales cercanas, para explicar, interpretar, matematizar y comunicar modelos (OCDE, 2017). Una pregunta emerge: ¿cómo propiciar a través de la modelización un aprendizaje centrado en el niño desde la educación primaria?

El experimento de enseñanza que se informa considera que el conocimiento nuevo proviene de experiencias e interacciones con situaciones contextualizadas, se construye sobre el conocimiento previo (formal e informal) del niño y mediante un proceso de cambio en los saberes apoyado desde las interacciones entre pares (Bransford, Brown y Cocking, 1999) y en prácticas científicas basadas en modelos (Duschl y Grandy, 2012). Se propone una situación donde un brazo hidráulico ayuda a clasificar residuos y, para mejorar el proceso, demanda describir el espacio donde actúa dicho mecanismo. El contexto puede interesar a los alumnos, dado que les permite jugar y experimentar con un prototipo, además los motiva a buscar diferentes representaciones de sus modelos (incluidas analogías desde sus referentes) y brinda oportunidades para evaluar la calidad de sus respuestas desde la experimentación (Aragón, 2013; Lesh y Doerr, 2003; Sevinc y Lesh, 2018). Por ello, los objetivos didácticos se orientan a comprender el funcionamiento de la máquina y desarrollar nociones de medición para describir su espacio de influencia desde la observación y experimentación con esta.

Los ejemplos de prácticas científicas centradas en la modelización pueden animar a los docentes a implementarlas en el aula de manera temprana, fomentando la participación de los alumnos, atendiendo a la preocupación de que dichas experiencias puedan articularse con el currículum educativo y desarrollar competencias en los alumnos para la modelización (Gallart, Ferrando Palomares y García Raffi, 2019).

FUNDAMENTACIÓN

La enseñanza de la ciencia requiere de experiencias para que los alumnos construyan y refinen sus producciones, a través de prácticas científicas basadas en modelos que favorezcan las progresiones en el aprendizaje (Duschl y Grandy, 2012). Desde esta visión, se promueve una alfabetización científica en los individuos al 1) desarrollar y evaluar evidencia científica, explicaciones y conocimientos, además de 2) criticar y comunicar ideas científicas e información. En este enfoque, el aprendizaje ocurre mediante las interacciones de los alumnos, en contextos apropiados para su edad, permitiéndoles centrar su atención en la construcción de modelos y su refinamiento (desde la medición, observación, discusión de pruebas y explicación), y un incremento del conocimiento científico (Duschl y Grandy, 2012). Así, los alumnos deben aprender, a través de la experiencia, el significado de ser racional y objetivo.

En el mismo sentido, el conocimiento se gesta desde la interacción entre distintas disciplinas. La interdisciplinariedad es un proceso cuyo propósito es generar formas de comprender y hacer ciencia útil para solucionar problemas de manera sistemática, propiciando el bienestar individual y colectivo de una comunidad (Chacón, Chacón y Alcedo, 2012). Se propone establecer un puente interdisciplinario (tabla 1), al utilizar un prototipo para explorar su funcionamiento y, mediante la determinación del espacio en el que actúa, tratar de imaginar la acción de un brazo hidráulico real y describirlo en una carta. La matemática en contexto posee dos ejes: *contextualización* y *descontextualización*. El primero involucra trabajo interdisciplinario, mientras que en el segundo se descarta información para dejar solo los elementos que permiten dar paso a la matematización de la situación. La contextualización ofrece al alumno una formación integral mediante un propósito en común de los saberes interdisciplinarios: las demás ciencias que estudia y las situaciones de la vida (Camarena, 2017). Este tipo de enseñanza involucra la necesidad de la modelización como parte del proceso de matematizar. Oliva (2019) menciona rasgos compatibles de las tareas:

- *Expresiva*: describe o explica fenómenos mediante la creación de nuevos modelos.
- *Exploratoria*: investiga las características de un modelo preexistente.
- *Experimental*: formula hipótesis y predicciones a partir de modelos que se prueban.
- *Evaluativa*: compara modelos alternativos que tratan la misma situación, evalúa sus ventajas y limitaciones para seleccionar el más apropiado.
- *Cíclica*: participa en ciclos completos de modelización.

Desde esta práctica científica, la modelización ha sido caracterizada mediante el acto discursivo que acompaña a dichas tareas: explicar, argumentar, razonar científicamente, evaluar por pares, aprender colaborativamente entre pares, andamiaje del docente, negociar, comunicar (Oliva, 2019).

En la perspectiva de modelos y modelización [PMM] (Lesh y Doerr, 2003) se aprecian las prácticas y los rasgos anteriores, además de apoyar un desarrollo conceptual partiendo de las experiencias previas y diferenciadas de los alumnos. Para ellos, la modelización propicia acciones como: cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones matemáticas, desarrollar criterios de comparación o decisión y aplicar procedimientos. En una actividad de modelización los alumnos pasan por una serie de interpretaciones de la situación a través de diferentes medios de representación y ciclos de modelado que incluyen: *descripción* que establece la correspondencia entre el mundo modelo y el real/imaginado; *manipulación* del modelo para generar predicciones o acciones relacionadas con la situación; la *traducción* que lleva los resultados relevantes al mundo real/imaginado; y la *verificación* sobre su utilidad.

Desde la PMM se presenta una *actividad detonadora de modelos* (*Model Eliciting Activities*, MEA) como un reto a los alumnos que responde a su cultura y contexto; cuya solución genera productos que van más allá de respuestas cortas a preguntas específicas; cuyos datos se derivan de la experimentación con material manipulable; y, donde el entendimiento conceptual puede ser documentado y asesorado de manera directa (Lesh y Doerr, 2003; Sevinc y Lesh, 2018; Gallart et al., 2019). En este acercamiento a la educación matemática y científica, los conceptos pueden fungir como herramientas para describir, explicar y diseñar artefactos, procesos de pensamiento referidos como *modelos* (Sevinc y Lesh, 2018). Además, la MEA se considera idónea para trabajar con alumnos sin experiencia previa en modelización, puesto que el producto final (carta) permite observar, comparar y evaluar el aprendizaje (Gallart et al., 2019).

Para Doerr (2016), la MEA alienta a los alumnos, en equipos, a involucrarse en un proceso iterativo donde expresan, prueban y redefinen sus maneras de pensar sobre situaciones problemáticas significativas. El diseño provoca la construcción de un modelo generalizable que aclara y delimita la estructura matemática de la situación. La MEA «provoca entendimiento matemático nuevo en los alumnos al estar en un contexto que los dota de significado y permite que expresen, a lo largo de la tarea, conocimiento proveniente tanto de su experiencia como de su conocimiento matemático» (p. 198).

La MEA requiere de otro tipo de actividad. Doerr (2016) explica que las *actividades de exploración de modelos* (AEM) involucran a los alumnos a pensar en los modelos que fueron obtenidos y centrarlos en la estructura matemática subyacente, las fortalezas de la diversidad de representaciones y las formas de usarlas productivamente.

Para Barquero, Bosch y Gascón (2014) es posible y necesario introducir a los alumnos en una actividad matemática centrada en problemas de modelización. Así lo permiten las orientaciones curriculares introducidas en los sistemas educativos que proponen el estudio de «situaciones de la vida real», más que de contenidos matemáticos. Para ellos la modelización puede vivir con normalidad en las instituciones educativas y consideran que es necesario estudiar las *condiciones* que se requieren y las *restricciones* que impiden que estas actividades puedan desarrollarse.

Los propósitos de la educación básica en México establecen un escenario idóneo para la modelización:

- Plantear la matemática como una construcción social, donde se argumentan y formulan procesos y hechos.
- Desarrollar habilidades en los alumnos que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.
- Apoyar el desarrollo de la confianza en las capacidades y perseverancia de los alumnos al enfrentar problemas, la disposición para el trabajo colaborativo y autónomo, al igual que la curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas (Secretaría de Educación Pública, 2018).

La MEA (figura 3) se propone en 4.º grado de primaria (al final del 2.º ciclo de educación primaria), por ello se consideró la transición al 3.º ciclo. En la tabla 1 se muestra la vinculación curricular de la MEA.

Tabla 1.
Vinculación curricular para la Educación Obligatoria (2016) y MEA

<i>Campo formativo (Asignatura)</i>	<i>Eje</i>	<i>Tema</i>	<i>Descripción por ciclo</i>
Lenguaje y comunicación (Lengua materna y literatura: Español)	Participación social	Uso de documentos administrativos y legales	3.º ciclo: Escribir cartas formales (impresas y electrónicas) para solicitar [y brindar] servicios.
Pensamiento matemático (Matemáticas)	Forma, espacio y medida	Figuras Geométricas	2.º ciclo: Describir la ubicación de objetos y lugares utilizando relaciones espaciales y puntos de referencia.
		Magnitudes y medidas	2.º ciclo: Estimar, comparar, ordenar y reproducir superficies de manera directa, con unidades no convencionales y convencionales. 3.º ciclo: Estimar, comparar y ordenar la capacidad de recipientes utilizando el mililitro.
	Procesos de cambio y pensamiento algebraico	Patrones y expresiones equivalentes	3.º ciclo: Explorar sucesiones de números y de figuras con progresión aritmética y geométrica.
Exploración y comprensión del mundo natural y social (Ciencias naturales y tecnología)	Materia energía y cambio	Fuerza y movimiento	2.º ciclo: Describir los efectos de la fuerza en los objetos.
			3.º ciclo: a) Explicar cómo funciona la aplicación de la fuerza en las máquinas simples. b) Describir el movimiento de objetos en función de la distancia y el tiempo.

<i>Campo formativo (Asignatura)</i>	<i>Eje</i>	<i>Tema</i>	<i>Descripción por ciclo</i>
Área: Desarrollo corporal y social	Motricidad	Habilidades y destrezas motrices	3. ^{er} ciclo: Estimular las destrezas motrices al manejar objetos e implementos.
			3. ^{er} ciclo: Aplicar habilidades motrices que requieren la manipulación de objetos.
	Creatividad	Exploración libre y pensamiento divergente	2. ^o ciclo: a) Explorar habilidades motrices en situaciones de juego, individuales y colectivas. b) Mostrar actitudes de cooperación y colaboración en situaciones de juego.
			3. ^{er} ciclo: Promover actitudes de compañerismo, ayuda mutua y respeto.
		Resolución de problemas y pensamiento estratégico	2. ^o ciclo: a) Identificar elementos del juego: reglas, adversarios, objetos e implementos. b) Utilizar estrategias de juego individuales y colectivas ante retos y/o problemas.
		Creatividad motriz y estratégica	3. ^{er} ciclo: a) Responder de manera creativa a problemas y retos motores. b) Construir respuestas creativas a partir de la motricidad. c) Favorecer ambientes de aprendizaje en la interacción motriz.

Fuente: Elaboración desde SEP (2016).

Fernández, Sesto y García-Rodeja (2017) consideran que las ideas nuevas generadas desde los modelos, a veces, se alejan de las ideas de la ciencia escolar y en ocasiones surgen contenidos tratados fuera del nivel educativo en cuestión. Por tanto, se puede asumir que la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias es un proceso de modelización durante el cual se produce la progresión de modelos iniciales hacia modelos de la ciencia escolar. En este sentido, Aragón (2013) considera que las analogías son un instrumento que contribuye al aprendizaje de conceptos y procedimientos científicos, así como a la valoración del proceso de construcción y su naturaleza. Para la autora, en el proceso de modelización, las capacidades más complejas son aquellas que requieren mayor dosis de imaginación y creatividad. Ella analiza las dimensiones del aprendizaje al trabajar con una actividad interdisciplinaria en educación secundaria donde reconoce la vinculación de las analogías con la modelización desde las siguientes dimensiones:

- *La evolución de los modelos explicativos de los alumnos sobre el cambio.* Estudiando la progresión en el uso de modelos: proposicionales o verbales, modelos simbólicos de carácter modal (diagramas pictóricos) y amodal (representación mediante símbolos, fórmulas y ecuaciones).
- *Las capacidades desarrolladas que se relacionan con la modelización en ciencias.* Esto es, las habilidades relacionadas con el aprendizaje de modelos, con el desarrollo de las destrezas necesarias en el proceso (aplicación, revisión y reconstrucción de modelos) y con el aprendizaje sobre su naturaleza.
- *Las capacidades relativas al pensamiento analógico,* para estudiar en qué medida los alumnos han aprendido analogías al aplicarlas, revisarlas, participar en la (re)construcción y su creación.

Al finalizar la experimentación de la propuesta de este trabajo, se puso de manifiesto el uso constante de analogías que ponían en juego los alumnos para poder progresar en la comprensión del funcionamiento del mecanismo.

METODOLOGÍA

Se utilizó la metodología basada en el diseño como forma cualitativa, intervencionista, que crea y evalúa condiciones novedosas para el aprendizaje a través de ciclos iterativos de concepción del diseño, observación, análisis y rediseño, acompañados de una retroalimentación sistemática de los usuarios (Bakker y van Eerde, 2015). Los resultados incluyen nuevas posibilidades de educación práctica y conocimientos relacionados con el proceso. En estos se anticipa cómo las formas particulares de enseñar funcionarían y estudiarlas conduce a una mayor comprensión de estas. Las fases implicadas son: *preparar* el experimento, *experimentar* para apoyar el aprendizaje y *realizar análisis retrospectivos* de los datos generados con los alumnos (Cobb y Gravemeijer, 2008).

Se recolectó evidencia (fotografías, producciones, notas y vídeos) de la intervención para analizar las discusiones (en equipo y grupales), el razonamiento que evidenciaron de manera verbal y escrita durante el trabajo colaborativo, y las representaciones para resolver la situación. La atención se fijó en los argumentos, formulación de procesos y hechos matemáticos; a la par del desarrollo de habilidades que les permitían plantear y resolver la situación con sus herramientas.

La MEA se implementó en una escuela pública de clase socioeconómica media-baja en Durango, México. El grupo fue de 22 alumnos de 4.º de primaria (10 años de edad). Se solicitaron los permisos necesarios con las autoridades del plantel y se indagaron particularidades de los alumnos. Así se tuvo conocimiento de que no habían tenido experiencia con actividades de modelización, que un alumno era débil visual y dos niñas tenían déficit de atención, esto ayudó a brindar el andamiaje requerido (Resultados de la experimentación: Módulo 1).

El objetivo fue analizar el experimento de enseñanza y mejorar el diseño de la MEA (figura 2). En la implementación estuvieron tres docentes: 1) *maestra titular* del grupo, con el papel de observadora; 2) *maestra de apoyo*, la cual participó del diseño y estuvo encargada de monitorear el trabajo del equipo que requería atención; y 3) *maestra guía* de la implementación y partícipe del diseño y su evaluación.

El diseño. Para diseñar y evaluar la MEA se consideró la tabla 2 siguiendo los principios de la PMM.

Tabla 2.
Evaluación de los principios de diseño de la MEA propuesta

<i>Principio</i>	<i>Justificación del diseño de acuerdo con PMM</i>
<i>Significado personal</i>	¿Pueden los alumnos entender la situación con base en conocimiento y experiencias previas?, ¿se toman en cuenta sus ideas sin inducir una forma de pensar específica? A partir del experimento y de la observación surgen distintas formas de delimitar el espacio en el que el brazo puede moverse.
<i>Construcción del modelo</i>	¿La tarea involucra la descripción, manipulación, predicción o control de una estructura matemática? Los alumnos elaboran descripciones para informar los movimientos necesarios para encastrar los cubos.
<i>Autoevaluación</i>	¿Pueden evaluar por sí mismos qué «tan buenas» son sus respuestas? Las diferentes respuestas pueden verificarse mediante la experimentación y evaluar la más eficiente.
<i>Documentación del modelo</i>	¿La respuesta requiere que el alumno revele qué está pensando de la situación (datos, metas)?, ¿qué clase de objetos, relaciones, operaciones y patrones pone en juego? En la carta, la descripción de movimientos provoca que se realicen mediciones de distancias y ángulos para explicar de forma precisa.
<i>Prototipo simple</i>	¿La experiencia puede ayudar a entender otras situaciones similares? La acción sobre una palanca origina un movimiento en el brazo, esto se puede abstraer como relación entre variables dependientes e independientes.
<i>Generalización de modelos</i>	¿La herramienta conceptual construida puede modificarse y extenderse para aplicarse a un rango más amplio de situaciones? La medición de distancias y ángulos, al igual que la forma de actuar de los mecanismos desde una fuerza o impulso que aplicada a una pieza provoca el movimiento de otra.

Fuente: Elaboración con base en Lesh et al. (2003).

Para la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2012), el uso de prototipos o representaciones tridimensionales es fundamental para desarrollar el pensamiento geométrico, dado su poder para coordinar los significados verbales capturados por el lenguaje con sus representaciones espaciales, dinámicas, con movimiento físico y flexión de modelos tridimensionales. Por ello, en el diseño fue central un prototipo (figura 1) cuyos componentes son:

- *Estructura central de tres ejes* (e1, e2 y e3) articulados que permiten movimientos verticales independientes (A y B). A un extremo hay una pinza (d) y del otro, un mecanismo para girar la estructura (C).
- *Panel de control* (f) con cuatro palancas, cada una de las cuales acciona un movimiento [verticales (A y B), giratorios (C) y para abrir o cerrar la pinza (d)]. Las cuatro jeringas están dispuestas en línea (f), unidas a palancas con cinchos y conectadas mediante mangueras a otras jeringas.
- *Base* (g) sobre la cual está colocado el mecanismo de giro de la estructura central y el panel (f).

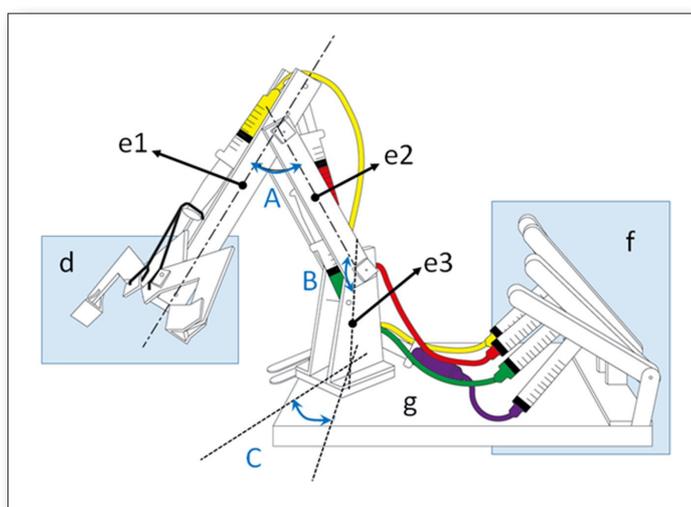


Fig. 1. Diagrama del prototipo del brazo hidráulico.

El prototipo fue provisto con un sistema hidráulico simple construido por las autoras con materiales económicos: cartón, mangueras, jeringas (capacidad de 12 ml), cinchos, alambre y pegamento. Las jeringas están conectadas por pares de manera que, al accionar una llena de líquido, esta envía el fluido a presión por medio de una manguera al cilindro vacío de una segunda jeringa dando como resultado una acción. Al actuar el cilindro se lleva a cabo un movimiento (halar o empujar) que se traduce en una acción específica de un componente. Por lo tanto, cada jeringa del panel (f) controla un componente específico: el giro de la estructura central, la altura de la pinza o la acción de abrirla y cerrarla. El líquido utilizado es de colores para simplificar su identificación, esto permitió una rápida familiarización por parte de los alumnos. Sin embargo, entre un prototipo y otro, hubo variaciones en la secuencia de colores, lo que causó conflicto al comunicar resultados (*Fase 2. Experimentar para apoyar el aprendizaje*).

Descripción de la MEA. El objetivo didáctico era explorar las oportunidades de integrar conocimiento interdisciplinario en una MEA cuyo producto final fue una carta redactada por los alumnos donde se puso en evidencia el desarrollo de nociones de medición al describir el espacio de funcionamiento de un brazo hidráulico. Lo anterior en un contexto centrado en el juego, la observación y la experimentación para facilitar la inclusión a la par que se desarrollan la creatividad, habilidades motrices y el ámbito psicosocial de los alumnos (tabla 1).

El set de juego (figura 2) contaba con cubos de unicel y tres contenedores. Aunado a la *actividad de calentamiento* (AC), la maestra guía realizó preguntas para detonar formas de pensar de los alumnos: ¿dónde se usan los brazos hidráulicos?, ¿cuál es su funcionamiento y espacio de trabajo? y ¿qué matemáticas pueden surgir desde esta actividad? Posteriormente, tuvo lugar la MEA (figura 3) planteando como situación que, con ayuda del brazo, se colocara el material reciclable comprimido en los recipientes indicados.

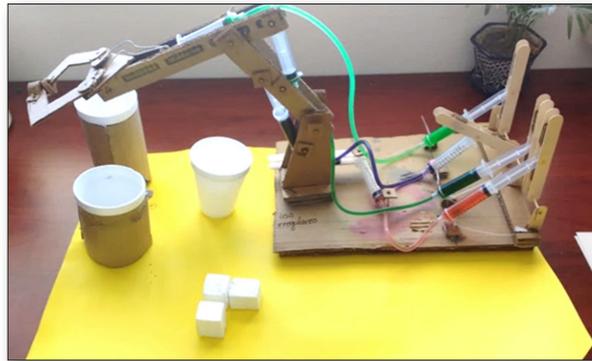


Fig. 2. Set de juego.

Para apoyar la elaboración de mejores descripciones en las cartas, se tenían preparadas preguntas para responderse de manera grupal después de la experimentación con el brazo. Se esperaba que los alumnos las retomaran, en el cierre, para hacerlas explícitas en sus cartas al comunicar su solución a la MEA.



3 R, Reduce, Recicla y Reutiliza

Don Ramón trabaja en una planta de reciclaje donde reducen la basura en cubos de metal, papel y plástico para después llevarlos a reutilizar o reciclar. Los cubos salen de la máquina en fila y sin seguir un orden. Enseguida, Don Ramón los pone con ayuda de un brazo hidráulico en un cesto correspondiente para ser trasladados.

Cada material tiene su cesto designado, los tres cestos son prismas rectangulares de 8 x 8 en las caras de abajo y arriba.

El primer cesto que se encuentra justo frente al brazo a una distancia de 23 cm tiene una altura de 10 cm y es el de **metal**.

El segundo cesto para el **plástico** se encuentra al lado izquierdo con 2 cm de separación del de metal, a 20 cm de la base y con 11.5 cm de altura.

El tercer cesto es el que almacena el **papel**, se encuentra del lado izquierdo con 2 cm de separación del cesto de plástico, de 19 cm de separación de la base del brazo y 15 cm de altura.

Recientemente, se ha incorporado el uso del brazo para apoyar el trabajo de Don Ramón, él quisiera saber qué movimientos debe hacer para poner cada cubo en su cesto correspondiente para optimizar el tiempo.

Se tiene un prototipo a escala del brazo hidráulico, ya que el brazo en el trabajo de Don Ramón es mucho más grande, él solicita que con tu ayuda y la de tu grupo, puedan explicarle con detalle, a través de una carta, cómo podría hacer su trabajo de manera más rápida y eficiente.





Fig. 3. MEA.

La tabla 3 fue elaborada a la luz de los datos obtenidos para analizar los resultados de la implementación de la MEA. Para la evolución de los modelos, se tomaron en cuenta los medios de representación (Lesh y Doerr, 2003, p. 12; Aragón, Oliva, y Navarrete, 2013) y para las capacidades desarrolladas se consideraron tanto las relacionadas con la modelización como con la analogía (Aragón et al., 2013). En ambos casos se hacen aportaciones propias.

Tabla 3.
Dimensiones y categorías de análisis para la MEA

<i>Dimensiones</i>	<i>Categorías</i>	<i>Descripción de códigos</i>
<i>Evolución de modelos explicativos de los alumnos</i>	Verbal (Ve)	Explican oralmente cómo se mueve el mecanismo.
	Simbólico modal (SiMo)	Dibujan el prototipo y plasman señales para indicar el movimiento.
	Simbólico amodal (SiA)	Matematizan la situación buscando representaciones adecuadas tales como organizaciones tabulares de los datos derivados de la experimentación, lo cual les permite encontrar relaciones.
<i>Capacidades desarrolladas para el proceso de modelización</i>	Aplicación (CaAp)	Aplican conocimientos previos como la utilización de transportador y regla.
	Revisión y relación (CaRev)	Revisan sus resultados al corroborar medidas. Establecen relaciones entre los elementos.
	Reconstrucción o ajuste de modelos (CaReCo)	Revaloran su procedimiento para saber si es apto para dar respuesta a lo solicitado (comparan su modelo con el de otros).
<i>Capacidades del pensamiento analógico</i>	Aplicación (ApAn)	Aplican conocimientos previos informales para hacer analogías. Usan su brazo para explicar los movimientos que efectúa el prototipo.
	Revisión (RevAn)	Revisan el mecanismo mediante las analogías.
	Participación en (re) construcción (ReCoAn)	Reconstruyen sus modelos basados en analogías.
	Creación (CeAn)	Crean respuestas alternativas con base en analogías para dar mejores resultados.

Fuente: Elaborada con base en Aragón et al. (2013); Lesh y Doerr (2003).

Cabe mencionar que en la evolución de los modelos puede haber categorías intermedias o de transición (se denotarán con *).

RESULTADOS

Se presentan los resultados del diseño y la implementación en el aula organizados de acuerdo con las fases de la metodología.

Fase 1. Preparación para el experimento. Se diseñó la MEA (figura 3), en la cual, los alumnos utilizarían el set (figura 2). Con base en los planes de estudio de primaria (SEP, 2016; 2018), se anticiparon posibles soluciones que pudieran surgir al implementarla con los alumnos, estas se encaminaron a identificar los niveles correspondientes en la graduación de las jeringas con relación a las posiciones del brazo (figura 1) y utilizar esta información (distancias y ángulos) para describir el proceso para colocar cada cubo en su correspondiente cesto. En las actividades se esperaba que los alumnos pudieran utilizar e integrar su conocimiento previo de medición y surgiera la necesidad de extenderlo o bien construir conocimiento sobre: medición de ángulos y distancias, triángulos, circunferencia y observaciones sobre el funcionamiento del mecanismo utilizado en el brazo (tabla 1).

Con la manipulación del prototipo se esperaba que los alumnos, identificaran los elementos dependientes e independientes del prototipo (figura 1). Además, con los datos proporcionados, se pretendía que pudieran determinar y explicar una manera de aproximar los movimientos y alcance del brazo, al aplicar el conocimiento derivado de la interacción en una actividad contextualizada en la vida real que podría despertar su interés, así como en el desarrollo de tecnologías que facilitan el trabajo físico.

A partir del resultado del experimento, se planteó un escenario donde los alumnos relacionaran la cantidad de fluido con el movimiento para que, con aproximaciones sucesivas, pudieran extraer información cuantitativa relevante que les permitiera iniciar con su matematización, además del entendimiento del mecanismo. En este proceso, de manera reiterada estarían en situaciones del tipo: ¿qué pasaría si...? Esto los llevaría a delimitar el espacio de acción del brazo y a realizar las hipótesis y observaciones necesarias para comunicar los pasos en su carta.

Fase 2. Experimentar para apoyar el aprendizaje. La implementación fue en tres módulos de 45 minutos cada uno: 1) se propuso una AC para mover con ayuda del prototipo, un cubo desde un punto inicial hasta encestarlo en un contenedor; 2) la MEA; 3) la concentración de ideas principales y comunicación de resultados.

Resultados de la experimentación. Módulo 1. El grupo fue dividido en siete equipos: uno de cuatro alumnos y seis conformados por tres. El equipo 7 requirió de una maestra de apoyo dadas sus características: un niño con debilidad visual (*J*) y dos niñas con problemas de atención (*L* y *R*). Con cuatro prototipos se inició la AC: uno utilizado de manera exclusiva por el equipo 7 y los demás compartidos por los equipos, tomando turnos. Fue necesario dedicarle más tiempo al equipo 7 para la exploración y para evaluar en qué medida se favorece la inclusión. Esto se detalla enseguida.

Equipo 7. *J*, *L* y *R* hicieron una exploración libre. La maestra realizó preguntas encaminadas a que entendieran el funcionamiento y el área de trabajo del prototipo. Fue notable que mostraron su interés, manipulando y observando (tabla 4).

Tabla 4.
Equipo 7, módulo 1

<i>Momento</i>	<i>Categoría y descripción</i>
Exploración	[Ve] La maestra dirige las manos de <i>J</i> a los elementos del brazo mientras las niñas observan. Luego, solicita a <i>L</i> y <i>R</i> que se unan accionando las palancas de los controles y, mientras exploran, le explican a <i>J</i> lo que hacen. Él siente el movimiento de las piezas.
	[CeAn] Con acciones en conjunto <i>J</i> comprende lo que está tocando: «¡Es una máquina!».
	[CaRev] <i>J</i> identifica que los actuadores del mecanismo son jeringas.
Explicación de la AC (descripción de la MEA) y segundo reconocimiento	[Ve] Tras la explicación del juego, <i>J</i> mostró interés por volver a reconocer las piezas, al ubicarlas en el set de juego y acercarlas a su rostro, para identificar alguna otra característica del objeto.
	[SiMo] <i>J</i> distinguía colores, pero el tacto le revelaba las formas.
	[Ve/CaRev] <i>L</i> y <i>R</i> apoyaron con acciones o preguntas referentes al objeto mientras <i>J</i> intentaba ver el mecanismo; <i>L</i> accionó la palanca que permitía el flujo del líquido en la manguera y específica que <i>J</i> estaba analizando y preguntó: «¿Sentiste eso?».
	[ReAn] <i>J</i> sintió lo que había pasado, pero no podía observar el movimiento en el brazo, solo podía ver el color del líquido.
	[ReCoAn] <i>R</i> tomó una de las manos de <i>J</i> y la dirigió a la parte del brazo que se movía, mientras su otra mano mantuvo sujetando la manguera con los dedos. <i>L</i> volvió a accionar la palanca.
	[Ve/CaRev] <i>J</i> tenía su rostro muy cerca de la manguera para poder verla y expresó asombro: «La manguera verde mueve el brazo de arriba para abajo».
AC	[SiMo] La maestra sugirió iniciar el reto y, mientras <i>R</i> y <i>L</i> llevaban a cabo la tarea de colocar los cubos en los cestos, <i>J</i> podía seguir <i>observando</i> con sus manos y acercando su rostro a las piezas, para entender los movimientos requeridos y dibujarlos en el aire estimando distancias.
	[RevAn] <i>J</i> descubrió algunos movimientos gracias a su tacto y logró conocer la trayectoria de la pinza y esquivar movimientos.
	[CaRev] <i>J</i> encestó el último cubo con apoyo de <i>R</i> y <i>L</i> .

Fue notorio el interés situado en la tarea y la satisfacción del logro en colaboración aportando a los ejes y campos formativos (tabla 1).

Seis equipos restantes. Mostraron actitud positiva desde la exploración del mecanismo. Para facilitar el lenguaje, los alumnos nombraron cada parte del prototipo (figura 1), tomando como referencia el brazo humano: mano a la pinza, muñeca y codo a las articulaciones, antebrazo y parte alta (ApAn). También se motivó a establecer un lenguaje común al identificar el punto medio de la base como la parte central del frente de esta (ApAn).

El desarrollo en esta parte fue similar al del equipo 7, quienes podían explicar el funcionamiento del brazo (Ve) y reconocían las relaciones (CaRev) entre los elementos.

Resultados de la experimentación. Módulo 2. Se conformaron seis equipos (integrando a *J*, *L* y *R* en otro equipo) y se obtuvo cuatro equipos de cuatro integrantes y dos de tres; además se contó con un prototipo. Se dio lectura detallada de la MEA (figura 3). Los niños no reconocían lo que era el diámetro y la maestra guía, a través de ejemplos y dibujos (SiMo), construyó tal definición en colectivo basándose en el radio del círculo: *el diámetro es el doble del radio* (CaRev).

Para entender cómo los alumnos determinaron el área de trabajo del brazo se presenta el siguiente diálogo entre la maestra guía y uno de los equipos con el prototipo (Ve/SiA):

- | | |
|---|---|
| [1] Maestra: ¿Qué hace la jeringa roja? | [5] M: ¿Cuánto giró para llegar al cesto de plástico? |
| [2] Niña 1: gira [ángulo C, figura 1] | [6] N1: 80° |
| [3] M: ¿Cuánto gira? | [7] ¿y para el [cesto] de papel? |
| [4] N2: 80° | [8] Niños: 30° [en coro] |
- [Muestra inicio y fin del giro C, figura 1]

Los alumnos, con ayuda del transportador, establecieron con dificultad un punto y una línea de referencia y al medir los ángulos *A*, *B* y *C* (figura 1), comentaron que «serían las mismas que en el brazo de Don Ramón», cuya medida es «real». Observaron que las longitudes entre dos puntos sí variaban, ya que el prototipo «tiene sus medidas en *cm* y en el brazo real en *m*» (SiA). Para las longitudes utilizaron la regla, sin contar los decimales. El uso de la regla y transportador para medir distancias y ángulos detonó la necesidad de utilizar unidades de medida correspondientes para describir los movimientos (*SiMo-SiA), cumpliendo los propósitos educativos (tabla 1). Surgió la idea de relacionar el líquido de las jeringas con el movimiento que realizaba el mecanismo (CaRev) y, a su vez, compararlo con sus brazos y su intención (ApAn). Esto se observó en otro episodio en el cual utilizaron información cualitativa derivada de la experiencia de manipulación del brazo: al efectuar un movimiento en alguna jeringa, se preguntan: ¿qué pasa cuando está llena y cuando está vacía la jeringa? o ¿qué indica un determinado nivel del fluido en alguna jeringa? Sus respuestas pasan de descripciones verbales (Ve) a descripciones con dibujos (SiMo). Los alumnos estuvieron desarrollando ideas, a partir del volumen de agua contenido en las jeringas y color del líquido de cada una, así como tomando medidas e identificando qué parte del brazo dependía del control de cada jeringa (SiA), con ello, se aproximaron a la idea de variables dependientes e independientes asociadas a un pensamiento variacional temprano (SiA). Este conocimiento no aparece en 4.º de primaria, pero es posible desarrollarlo con actividades experimentales.

Utilizaron las medidas reales del prototipo con el que contaba; por tal motivo no hubo variabilidad, luego indicaron la medida del ángulo (SiA), lo que mostró que tienden a pensar que *los ángulos A, B y C* (figura 1) *se mantenían igual en un brazo de dimensiones a gran escala* (CaReCo). Dieron muestra de identificar el ángulo como un invariante geométrico en la proporcionalidad (SiMo).

El tiempo fue insuficiente para escribir las cartas, por ello se les pidió que las hicieran para exponer en el módulo 3 su idea para resolver la situación.

Resultados de la experimentación. Módulo 3. La conformación de los equipos fue igual que en el módulo 2. Los niños expresaron dificultades para realizar la carta, por ello la maestra asignó 10 minutos

para apoyarlos en esta transición, y retomó aspectos del módulo 2 que permitieron recordar y relacionar la experiencia (CaReCo). Realizó preguntas como: «¿cuánto tenía que girar el brazo para llegar al cesto?, ¿cuál era la altura máxima que alcanzaba el brazo?»; los alumnos contestaron acertadamente en cuanto a las medidas que tomaron (CaRev). Además, les preguntó: «¿creen que con eso sea suficiente para que Don Ramón pueda entender cómo mover el brazo y colocar los cubos de basura?». Los niños contestaron que «desde la altura máxima puede soltar cada cubo» (SiA). La guía, con la intención de que pudieran visualizar en el pizarrón los datos que necesitaban para escribir la carta, reprodujo el dibujo del brazo, acompañándolo con toda la información que los niños iban brindando (RevAn). Lo anterior facilitó la tarea y lograron escribir la carta (figura 4) en equipo (ReCoAn).

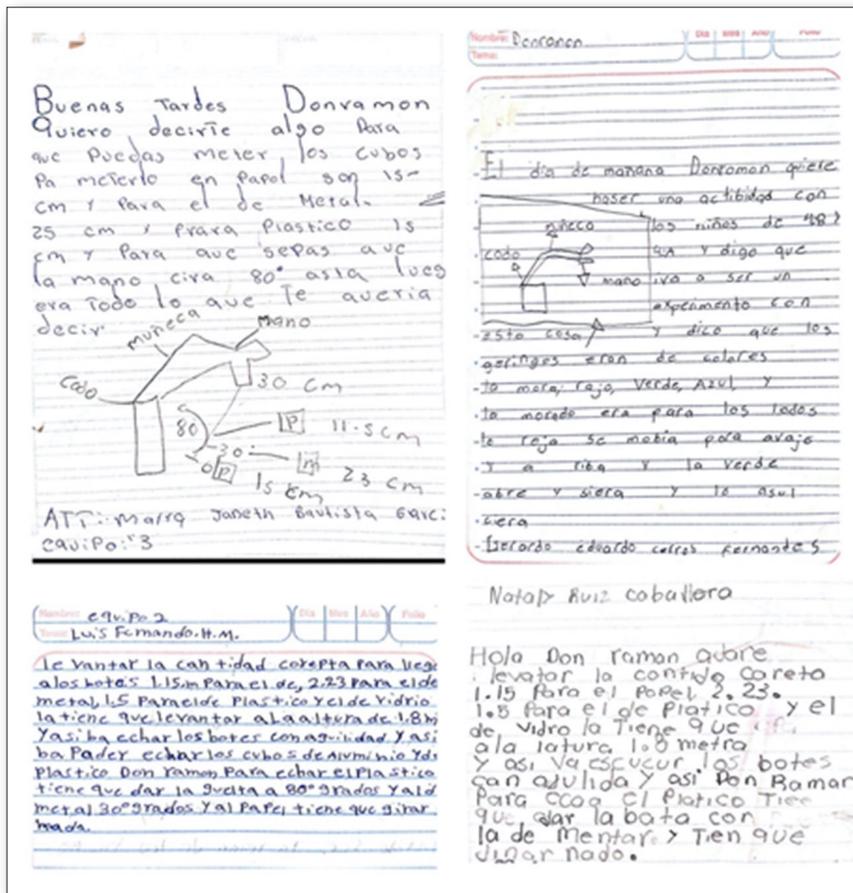


Fig. 4. Algunas cartas de los alumnos.

Al revisar las cartas de los seis equipos (figura 4), se observó que en cinco (excepto el equipo 4) los alumnos transitan de una descripción cualitativa a una cuantitativa identificando los datos relevantes y cuantificando medidas del prototipo. El equipo 4 trató de señalar que los movimientos se efectuaban con los colores del líquido de las jeringas y su alcance de acuerdo con el volumen contenido. La tabla 5 resume los logros.

Tabla 5.
Evidencias de los equipos en la MEA

Categoría	Equipo	Descripción
SiA/CaAp/CapRev	2	Ponen en juego una representación mental para transformar las medidas del prototipo (cm) a medidas reales (m) y plantean su procedimiento en m, además miden el «giro» en grados e identifican que, para lograr una acción concreta se requerían acciones concretas, por ejemplo, elevar la pinza 1,5 m y girar 80°.
SiMo	5,3	Retoman la representación pictórica del prototipo al presentar dificultades para plantear una solución.
ReCoAn / SiA	1,5,6	Reconocen medidas de altura (<i>cm</i>) y «giro» (<i>grados</i>) haciendo distinción entre ellas y utilizando las magnitudes de manera correcta.
*SiMo-SiA	5	Reconocen la acción de «no girar» como 0 grados.
*SiMo-SiA/CaRev	4	Asocian el fluido en las jeringas con el movimiento, por ejemplo, identifican de forma imprecisa que cierta cantidad de fluido provoca una magnitud determinada en el ángulo C (figura 1).

Fase 3. Análisis retrospectivo. Se revisan aspectos relevantes durante el diseño, implementación y análisis de la actividad.

Observaciones al prototipo. La construcción manual de los prototipos implicó pequeñas diferencias entre ellos: la secuencia de colores utilizados para el líquido y las unidades de medida. Por ello, se buscaron puntos de referencia que fueran alcanzables para todos: hablar de «aproximaciones» y posición numerada de las jeringas del panel de control. La AC (centrada en el juego) propició un ambiente relajado que permitió a los niños expresar sus emociones, esforzarse por cumplir el reto y observar el mecanismo (tablas 4 y 5).

En la anticipación de resultados (*Fase 1. Preparación para el experimento*), la primera idea era que los niños, por medio de la graduación de las jeringas (ml), logran expresar las medidas del nivel del líquido en la jeringa, pero esto solo se observó en el equipo 3. Ellos identificaron medio giro del prototipo con la mitad del nivel de líquido en la jeringa y exploraron algunos giros asociando medidas de ángulos con ml, pero sin el tiempo suficiente para lograr el registro de datos que les permitieran explorar patrones de variación. Otra idea anticipó que surgirían los ángulos *A*, *B* y *C* (figura 1), pero solo tomaron en cuenta el *C* y la altura a la que debía estar la pinza para poder depositar la basura.

Observaciones y propuesta de rediseño. La actividad fue incluyente para niños con necesidades especiales. Pudieron explorar y descubrir el funcionamiento del brazo y reconocer la dependencia de sus elementos; lograron encontrar las medidas para determinar su alcance; y, en suma, pudieron integrarse y comprometerse con la tarea.

Algunos alumnos desconocían conceptos útiles que se revisaron en grupo: diámetro de un círculo o que el brazo podía crecer manteniendo su forma y funcionamiento. Para informar un rediseño de la MEA, desde las competencias para 4.º de primaria, se considera pertinente propiciar que realicen sus registros de manera ordenada para que puedan describir posiciones y alturas de cada cesto, así como utilizar primero, cestos en forma de prismas rectangulares y luego pasar a los cilindros, pues aún no están familiarizados con propiedades del círculo.

Para Doerr (2016) las actividades anteriores son insuficientes para formalizar conocimientos, pues varias ideas se quedan sin explorar. Por ello, en esta experiencia se propuso una *actividad de exploración de modelos* (AEM). Se exploró con alumnos a establecer relaciones entre la cantidad de líquido en la jeringa con la medición del movimiento provocado para introducir ideas tempranas de variación.

Actividad de exploración de modelos. La AEM pretendía indagar cómo dos alumnas (Ana y Eli), relacionarían el líquido de la jeringa con el movimiento del brazo. Ellas notaron que el prototipo (figura 1) tenía restricciones físicas que le impedían tener las jeringas completamente vacías (0 ml) o llenas (12 ml).

Comenzaron accionando la jeringa verde que controlaba la apertura del ángulo B (figura 1), la altura de la pinza, y observaron que con 1 ml de líquido en la jeringa se alcanzaba la altura de 34 cm en relación con el piso. Al aumentar el volumen a 2 ml la pinza se posicionaba a 30 cm del piso, y así sucesivamente, hasta alcanzar un volumen de 8 ml, cuando la pinza topaba en el suelo (CaAp/CaRev). La maestra motivó la construcción de la tabla 5 con los datos para documentar el volumen de líquido y la altura de la pinza para cada caso. Continuaron su observación con la jeringa morada (figura 1), encargada de modificar el ángulo C. Trataron de replicar el ejercicio anterior, pero notaron una trayectoria distinta e identificaron que la unidad de medición para la rotación era el ángulo, por ello decidieron usar un transportador (CaAp), sin embargo, el vértice no era evidente, ni las líneas para marcar el ángulo; esto las introduce en una dinámica de observar, buscar tales elementos y discutir si son los adecuados (RevAn).

Después de intentos fallidos, la maestra sugiere analizar el movimiento que causaba la jeringa roja (ángulo A, figura 1). Al contrario que el caso anterior, Ana y Eli no dudaron del lugar donde debían colocar el transportador para medir el ángulo (CaRev), sin embargo, el ancho del eje representó una dificultad para medirlo. Acordaron dibujar una línea en el cartón del brazo para facilitararlo (SiA) y juntas lograron medirlo (figura 4); Ana expresó que encontró un patrón: «con cada ml que aumenta en la jeringa el brazo alcanza 5 grados más» (CaAp/SiA). Enseguida, se propusieron verificar diferentes valores e incluso hicieron pronósticos: «con 13 ml pueden llegar hasta 115°», pero se dieron cuenta de que la capacidad de la jeringa (12 ml) era limitada (CaReCo).

La exploración de la jeringa roja facilitó identificar el movimiento de la jeringa morada y determinar el vértice. Al separar g de $e3$ (figura 1) comprobaron el lugar de ensamble, lo que les permitió medir el ángulo C (CaRev/CaReCo) y registrar datos (tabla 6).

Encontrar la relación entre el volumen de líquido en las jeringas y el movimiento (CaRev) y lograr describir y expresar un patrón de crecimiento o decrecimiento permitieron a las niñas reconocer la posible progresión aritmética relacionada con la variación lineal, incluso llegaron a especular sobre cuál sería la siguiente altura/apertura (RevAn). Durante el proceso identificaron unidades de medida distintas y lograron acuerdos que les permitieron reconocer conceptos como vértice, y que fueron construyendo al identificarlos en la estructura (SiA).



Fig. 5. Alcance del brazo en grados.

En la tabla 6 se observan las anotaciones en correspondencia con unidades de medida. El registro no consideró la pinza puesto que «solo abre y cierra», es decir, es una variable discreta con dos estados (SiA).

Tabla 6.
Alcances del brazo hidráulico

Ángulo B (verde)		Ángulo C (morada)		Ángulo A (roja)	
MI	Cm	MI	Grados	MI	Grados
1	34	1	40	1	
2	30	2	45	2	40
3	25	3	50	3	50
4	20,5	4	55	4	60
5	16,5	5	60	5	70
6	11,5	6	65	6	80
7	8	7	70	7	85
8	4	8	75	8	90
		9	80	9	95
		10	85	10	100
		11	90	11	105
				12	110

Fuente: Propiciada por el docente y completada por las alumnas.

La tabla 6 muestra la variación lineal del ángulo C que Ana y Eli identifican como «un patrón» en el comportamiento de los datos. También identificaron que el ángulo A se inicia con un patrón, pero luego cambió la razón, lo que interpretaron como un comportamiento distinto al del ángulo C (SiA), es decir, la variación es no lineal y solo lograron identificar que ese movimiento es un semicírculo (ApAn). Lo sucedido genera expectativas para reproducir las tareas, a fin de provocar nociones como variables dependientes e independientes relacionadas con principios de física como *acción-reacción*, identificar relaciones y patrones de cambio.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De manera similar a los resultados expuestos por Aragón (2013) y Aragón et al. (2013) en el nivel secundaria, se pudo observar una notable vinculación entre el desarrollo de modelos y las analogías en contextos interdisciplinarios, en este caso con alumnos de primaria.

Con respecto a las aportaciones curriculares de la actividad (tabla 1), en el campo formativo se puede decir que los alumnos:

1. Fueron capaces de redactar cartas formales a un «cliente» para comunicar su recomendación en la resolución del problema.
2. Pusieron de manifiesto la ubicación de objetos desde puntos referenciales. Para ello, pudieron cuantificar la capacidad de las jeringas (ml), los ángulos de giro (°) y la medición de distancias (cm y m). Lograron encontrar patrones en progresión aritmética que puede apoyar la introducción de la noción de proporcionalidad, al profundizar en los procesos de cambio asociados al

- movimiento de las partes del mecanismo en una correspondencia dependiente de la cantidad de líquido de las jeringas.
3. Lograron verbalizar los efectos de la fuerza inyectada en las jeringas para provocar el movimiento de las partes del brazo en relación con la distancia y el giro. La manipulación del prototipo representó un reto para los alumnos, quienes se vieron en la necesidad de regular sus habilidades motrices para sincronizar su fuerza con el movimiento deseado. Incluso en las primeras exploraciones notaron que debían cuidar sus movimientos para no dañar los prototipos y concluir satisfactoriamente el juego.
 4. Mostraron colaboración, actitud positiva, compañerismo y respeto, lo que favoreció la inclusión en todos los equipos (especialmente se detalló en el equipo 7). Los elementos propuestos ayudaron a que los alumnos pusieran en juego estrategias individuales y colectivas ante el reto, al mismo tiempo que favorecieron su interacción motriz.

El diseño cumple con los principios (tabla 2), al lograr que los alumnos construyeran un modelo generalizable a otras situaciones, y provocar un entendimiento matemático al estar situado en un contexto significativo en el que pudieron experimentar (Lesh et al., 2003; Sevinc y Lesh, 2018). En la AEM se obtuvieron estructuras matemáticas, en varias representaciones, y en casos particulares algunos equipos llegaron a modelos similares. Se considera que la secuencia es pertinente y está alineada con los planes de estudio (SEP, 2016; 2018). Gracias al bajo costo de los materiales, puede adoptarse en escuelas con limitación de recursos y con la necesidad de integrar a niños con barreras para el aprendizaje, dada la capacidad experimental. Además, apoya la comprensión lectora y comunicación de ideas, pues se requiere un mayor entendimiento para transmitir en una carta su solución, aún y cuando al principio puede ser complicado habituar a los alumnos.

Para que la experiencia pueda replicarse por otros docentes, se consideró pertinente realizar un análisis mediante las dimensiones de la tabla 3, que permitió observar las analogías recurrentes como un recurso para apoyar la modelización, al igual que reportan Aragón (2013) y Aragón et al. (2013). Por ello se puede decir que existe una vinculación entre el desarrollo de ambas competencias, dada la analogía natural que se ha podido establecer entre los mecanismos del brazo hidráulico y del humano. Al igual que los tipos de modelos (verbales, simbólico modal y simbólico amodal) exhibidos y el tránsito entre ellos. La MEA motivó a los alumnos al plantear una situación cercana y comprensible para ellos, permitiendo analogías para que pudieran extraer información de la situación, descartar aquella no relevante y transitar hacia lo cuantitativo para generar modelos que los ayudaron a entender qué estaba pasando.

La elección de la MEA fue idónea para introducir la modelización en el aula, tal y como lo sugieren Gallart et al. (2019). Los alumnos resolvieron la situación desde un conocimiento informal (adquirido fuera del aula con base en experiencias y que incluía analogías respecto a su brazo) y haciendo uso de las matemáticas que tenían a mano para la medición. Ellos decidieron cómo manipular el brazo y se centraron en elementos que permitieron matematizar la situación. Se les observó involucrados e interesados sin estar agobiados por tener que llegar a una respuesta esperada, debido a la multiplicidad de respuestas apropiadas (Lesh y Doerr, 2003). Sin embargo, hubo desconcierto al no haber un ejemplo previo o ciertos pasos que seguir para llegar a describir el área de trabajo del brazo y realizar las recomendaciones al cliente que las demandaba. Ello los impulsó a involucrarse y ver con detalle qué información pudieran extraer para abrir las posibilidades de solución y alejarlos de la idea de que en matemáticas se siguen instrucciones para llegar a una única respuesta apropiada.

Barquero et al. (2014) sugieren estudiar las condiciones y restricciones que impiden que la modelización pueda desarrollarse en el aula. Por ello, se considera prioritario un acompañamiento al docente, que debe seguir e incentivar el pensamiento del alumno y no imponer el suyo. En esta experiencia la

maestra titular solo mostró interés por las mediciones de distancias y de ángulos, sin embargo, temas como variación y principios físicos de fluidos pasaron inadvertidos, posiblemente porque no aparecen de manera explícita en el programa. Esto limitó la exploración con todo el grupo y no se pudieron extender ideas asociadas al pensamiento variacional que habían surgido. Para Fernández et al. (2017), en estas actividades se produce una progresión de los modelos iniciales de los alumnos hacia los modelos pretendidos en la escuela; es necesario apoyar al docente para: identificar las ideas fundamentales y sistemas conceptuales que pueden surgir; anticipar las estrategias que podrían aplicar los alumnos en colaboración; trazar conexiones con una posible solución, fomentando la fluidez entre diversas representaciones, para luego crear un ambiente de debate donde aprendan mientras explican y justifican su modelo a otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aragón, M. M. (2013). Aportación de la enseñanza con analogías al desarrollo del pensamiento modelizador de los alumnos acerca del cambio químico. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 282-283. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.1111>
- Aragón, M. M., Oliva, J. M. y Navarrete, A. (2013). Evolución de los modelos explicativos de los alumnos en torno al cambio químico a través de una propuesta didáctica con analogías. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 9-30. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.832>
- Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner, C. Knipping y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429-466). Springer.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Bransford, J. D., Brown, A. L. y Cocking, R. R. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Camarena, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(2), 1-26. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26>
- Chacón, M. A., Chacón, C. T. y Alcedo, Y. A. (2012). Los proyectos de aprendizaje interdisciplinarios en la formación docente. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 17(54), 877-902.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y Baek (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science* (pp. 68-95). Londres: Routledge.
- Doerr, H. M. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie, *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 197-2016). Reston VA: NCTM.
- Duschl, R. y Grandy, R. (2012). Two Views About Explicitly Teaching Nature of Science. *Science & Educación*, 22, 2109-2139.
- Fernández, A., Sesto, V. y García-Rodeja, I. (2017). Modelos mentales de los estudiantes de secundaria sobre el suelo. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 127-145. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2217>

- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86.
<https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En: R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- OCDE (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. París: OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf
- Oliva, J. M. (2019). Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(2), 5-24.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2648>
- Secretaría de Educación Pública (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. <https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/7077/1/images/Propuesta%20Curricular%20Final%20Completo.pdf>
- SEP (2018). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio la educación básica*. México: SEP.
- Sevinc, S. y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education*, 50, 301-314.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>

Mathematical modeling in elementary education: the hydraulic arm

Elisa Salcedo Talamantes, Angelina Alvarado Monroy, María José Aviña González
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango
elisa.salcedo@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx, mjavina@ujed.mx

Mathematics education trend in K12 level is towards the construction of integrated knowledge that allows students to face real situations close to them to explain, interpret, mathematize and communicate their models (OECD, 2017). A question therefore emerges: how to promote student-centered learning in elementary education through modeling?

The teaching experiment reported considers that new knowledge comes from experiences and interactions with situations in relevant contexts. It is built on the child's prior knowledge (formal and informal), processed when the student interprets the situation and this new knowledge rises supported by interactions between peers (Bransford, Brown & Cocking, 1999), and in model-based scientific practices (Duschl & Grandy, 2012).

Student's developed competences in modeling require scientific practices examples focused on modeling that may encourage teachers to implement them early in their classroom, eliciting student's participation, according to those experiences stated in the educational curriculum (Gallart, Ferrando Palomares & García Raffi, 2019).

This paper presents an experimental study to design and explore the potential of a modeling eliciting activity (MEA) in elementary school with Mexican students enrolled in fourth grade. The framework integrates the models and modeling perspective [M&M] (Lesh & Doerr, 2003) and design-based research methodology (Bakker & van Eerde, 2015), which were used for MEA development and refinement. These go through iterative cycles of conception, observation, analysis, and redesign. The sequence design integrates a warm-up activity and the MEA. The first one included the interaction and manipulation of a hydraulic arm prototype, whose purpose was to facilitate the determination of its workspace. The MEA aims to incite the construction and integration of mathematical contents, stimulating the development of students' modeling competences, and, at the same time, attempt to achieve the curriculum objectives.

The MEA proposes a situation where a hydraulic arm helps to classify recyclable waste and, in order to improve the process, it requires to describe the space where the mechanism operates. The context may interest students since it allows them to play and experiment with a prototype. Besides motivating them to look for different representations of their models (including analogies from their referents), it provides them with opportunities to evaluate the quality of their responses from the experimentation (Aragón, 2013; Lesh & Doerr, 2003; Sevinc & Lesh, 2018). This is useful in the process of achieving didactic objectives aimed at the understanding of the mechanism operation and students' measurement notions to describe space derived from the observation and experimentation with the prototype.

The result of implementation (analyzed evidence from student's productions) shows their understanding of the operation of the mechanism and their description of its workspace. In addition, they show the ability to estimate angles and distances measurement. Some students went further by building great idea to approach the key knowledge around linear variation. This concept is formally addressed in middle school in Mexico.

The design accomplishes M&M principles by getting students to build a generalizable model to other situations and to initiate a mathematical understanding by being situated in a meaningful context in which they experiment (Lesh et al., 2003). The mathematical structures obtained were explored in various representations, in particular cases, some teams reached similar models. The sequence is relevant and it is aligned with the Mexican curriculum (SEP, 2016; 2017). It can be adopted in schools with limited resources and with the need to integrate children with learning barriers, once given the experimental capacity. Also, it supports reading comprehension and communication of ideas, since a greater understanding is required to convey its solution in a letter.

