



Una propuesta innovadora de inclusión de valores morales en la enseñanza de Matemáticas

An innovative proposal for the inclusion of moral values in mathematics teaching

Isaias Miranda

*Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria
Ciudad de México, México
imirandav@ipn.mx*

Elena Glenda Freire Gard

*Instituto de Profesores Artigas-Consejo de Formación en Educación
Montevideo, Uruguay
efreire@docente.ceibal.edu.uy*

RESUMEN • El objetivo de este artículo es doble: 1) documentar el diseño de una secuencia didáctica innovadora que relaciona problemas sobre el concepto de función a trozos con preguntas que involucran dilemas sobre valores morales, y 2) analizar cómo estudiantes de Enseñanza Media (17-18 años de edad), al responder a los dilemas, relacionan el concepto de función a trozos con valores morales específicos. La metodología para elaborar la secuencia se basó en un enfoque socioformativo del aprendizaje. El análisis se llevó a cabo a partir del discurso escrito y hablado de los estudiantes en clase. Los resultados indican que, al responder los dilemas, los estudiantes manipulan el concepto de función a trozos tanto en términos de su significación matemática como de su valoración moral. Se concluye que la propuesta puede ayudar a organizar una enseñanza más integral para el estudiante de Matemáticas.

PALABRAS CLAVE: Enseñanza de las Matemáticas; Innovación didáctica; Valor moral; Concepto de función a trozos; Dilemas morales.

ABSTRACT • The aim of this article is twofold: 1) to document the design of an innovative teaching sequence that links problems related to the concept of piecewise function with questions involving moral dilemmas; 2) to analyze how middle school students (17-18 years old) establish a relationship between the mathematical concept and specific moral values when responding to the dilemmas. The methodology used was drawn on considerations of a socio-formal approach to the learner. The analysis was made on the basis of students' written and spoken discourse during the classroom. Results indicate that, in responding to dilemmas, students manage to manipulate the concept of piecewise function not only in terms of its mathematical meaning, but also of its moral value. We conclude that the didactic sequence may help to organize a more comprehensive teaching for mathematics students.

KEYWORDS: Mathematics teaching; Didactic innovation; Moral value; Concept of piecewise function; Moral dilemmas.

Recepción: julio 2019 • Aceptación: octubre 2019 • Publicación: marzo 2020

INTRODUCCIÓN

En las reformas educativas sobre la enseñanza de las Matemáticas realizadas en la mayoría de países occidentales, se plantea que los planes y los programas de estudio consideren la resolución de problemas como una metodología adecuada para lograr aprendizajes significativos. Así, se supone, por un lado, que la enseñanza de las Matemáticas debe asemejarse a una de las actividades de los matemáticos profesionales: plantear y resolver problemas. Por otro lado, se supone que resolver problemas es una actividad vinculada con la vida diaria de los estudiantes (Díaz-Quezada y Poblete-Letelier, 2013). Dichos supuestos han motivado que la enseñanza de las Matemáticas se haya enfocado, principalmente, a desarrollar habilidades cognitivas en los estudiantes (por ejemplo, la habilidad de desarrollar un pensamiento lógico matemático). Sin embargo, esta forma de orientar la enseñanza ha sido cuestionada por algunos investigadores (Díaz-Quezada y Poblete-Letelier, 2013, 2014; Falkenberg, 2006; Hansen, 2001), quienes, con base en trabajos como el de Buzzelli y Johnston (2002), consideran que la enseñanza de las Matemáticas contiene, implícita o explícitamente, una componente moral. Otros investigadores del área utilizan el término *justicia social* para referirse a la realización de los valores éticos y morales latentes en la enseñanza de las Matemáticas. En Planas (2011) y en Planas y Civil (2009), por ejemplo, se muestra cómo determinadas situaciones de aula llevan a algunos estudiantes a dar valor en sus escritos matemáticos a la participación en la tarea de compañeros que están aprendiendo la lengua de instrucción, lo cual implica el valor ético y moral de reconocimiento de la diversidad.

Más en general y fuera del ámbito de la investigación educativa, la UNESCO (2016) propone que no solo se puedan trasladar los contenidos de los programas de estudio de la vida real al aula, junto a una concepción de la enseñanza de las Matemáticas que privilegie *el saber-hacer*, sino también el desarrollo de habilidades útiles para la vida. Eso sí, esta utilidad no debería interpretarse como la preparación de los estudiantes para la vida laboral. Se trata de abordar temas que logren vincular contenidos y conocimientos con normas universales de comportamiento, esto es, con los valores basados en los derechos humanos. Así pues, es deseable que la enseñanza de las Matemáticas centre su atención en desarrollar habilidades tanto de contenido conceptual (por ejemplo, habilidad para resolver problemas) como de análisis crítico sobre las consecuencias del comportamiento individual (por ejemplo, habilidad para ser empático).

El objetivo de este artículo es, por un lado, proponer una forma de entrelazar la enseñanza de conceptos matemáticos con la enseñanza de valores morales y, por otro lado, analizar la forma en que estudiantes de Enseñanza Media relacionan el concepto de función a trozos en el momento de responder preguntas que involucran dilemas sobre el concepto de justicia. Debido al doble propósito, el artículo se divide en dos partes principales. La primera parte contiene, para empezar, trabajos sobre la importancia de relacionar la enseñanza de las Matemáticas con la de valores morales, y luego aborda trabajos sobre la complejidad de aprender el concepto de función. En la segunda sección se describe primero el marco socioformativo para la elaboración de la secuencia didáctica, y luego la metodología y el análisis tras la implementación de la secuencia. Aquí se detalla la metodología utilizada para estudiar las respuestas de los estudiantes a las preguntas del problema principal de la secuencia didáctica, el problema moral, y se muestra el análisis de respuestas a preguntas sobre el problema. El artículo termina con conclusiones y reflexiones finales.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SU RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA DE VALORES

Bishop (2008) reconoce que en la mayoría de profesores de Matemáticas (e, incluso, entre la mayoría de personas) existe una creencia arraigada de que éstas *están libres de valores*, es decir, que las Matemáticas no se relacionan con los valores. Esto ha hecho que, tradicionalmente, la enseñanza de conceptos matemáticos sea considerada una práctica ajena a la formación de valores morales. En su estudio, Díaz-Quezada y Poblete-Letelier (2013) muestran que, en el aula de Matemáticas, la resolución de problemas se aborda desde el punto de vista conceptual y no axiológico. Este hecho es reconocido por los estudiantes chilenos de enseñanza media entrevistados en su estudio, quienes aseguran que no acostumbran a relacionar problemas matemáticos con valores morales.

Una vez reconocida la necesidad de la formación integral del estudiante, la atención de los investigadores se ha centrado en determinar los tipos de problemas matemáticos con los que se pueda promover la enseñanza socioformativa del estudiante. Por ejemplo, Díaz-Quezada y Poblete-Letelier (2013) proponen integrar la enseñanza de valores éticos por medio de problemas matemáticos cuyos temas resulten familiares a los estudiantes. A tal fin, estos investigadores elaboraron preguntas a partir de cuyas respuestas es posible examinar el reconocimiento de la importancia del cuidado de la salud. Para ilustrar este tipo de problemas, transcribimos parte de uno de los utilizados:

Los nutricionistas, preocupados por la obesidad de nuestro país [Chile], elaboraron un gráfico que muestra la cantidad mínima de calorías por hora y por m^2 de superficie corporal que se necesita en función de la edad (0 años corresponde a un recién nacido). Hace dos siglos, el matemático Lagrange desarrolló un polinomio interpolar que permite «fabricar» una función polinómica que pase por los puntos que se desee. Por ejemplo, con los 5 puntos del gráfico [no reproducido en este trabajo] se puede construir la siguiente función $C(x) = -0,0046x^4 + 0,2x^3 - 2,95x^2 + 16,36x + 30$, donde x es la edad en años y c las calorías necesarias. ¿Cuántas calorías necesita un adolescente de 14 años? ¿Qué ocurre con los requerimientos calóricos durante los primeros 5 años de vida? (Díaz-Quezada y Poblete-Letelier, 2013, p. 128).

Los estudiantes debían responder preguntas sobre valores que asocian con la situación planteada, o sobre una posible preocupación por tener una alimentación equilibrada. Al igual que Díaz-Quezada y Poblete-Letelier (2013, 2014), los estudios de Sigarreta y Laborde (2003) y de Sigarreta y Torres (2003) han propuesto que la resolución de problemas se convierta en un medio para favorecer la formación de valores que fortalezcan la convivencia humana. Por un lado, Sigarreta y Torres (2003) aseguran que la formación de las personas en valores, como la responsabilidad o la solidaridad, puede ser estudiada a partir del análisis de tres componentes: cognitivo-ideológico, afectivo-volitivo y el de las experiencias acumuladas en la actividad del estudiante. En este sentido, se sugiere que los problemas no tendrían que exigir la realización de cálculos por parte de los estudiantes, sino la elaboración de argumentos con los que se puedan justificar estrategias de resolución. Por otro lado, y de manera complementaria, Sigarreta y Laborde proponen un modelo didáctico con el que es posible apoyar la formación de valores por medio de la resolución de problemas matemáticos al incluir temáticas de tipo socioeconómico, político-ideológico o científico-medioambiental según el valor que el profesor quiera trabajar.

Uno de los objetivos de este artículo es contribuir al conocimiento relacionado con el tipo de características que deben tener los problemas matemáticos para introducir el desarrollo de valores en los estudiantes. A diferencia de las propuestas de otros autores mencionadas, la de este artículo no se centra en la elaboración del texto del problema, sino en la discusión de índole valorativo que puede generarse en los estudiantes a partir de la resolución del problema. Se pretende entrelazar el tratamiento conceptual con la toma de decisiones valoradas desde el punto de vista moral. La propuesta plantea la manipulación del concepto matemático de función para resolver una pregunta en cuya respuesta

esté involucrada una decisión en relación con el significado de justicia del estudiante. En la siguiente sección se detallan investigaciones sobre el aprendizaje del concepto de función.

El aprendizaje del concepto matemático de función

Este no es un artículo de discusión del concepto matemático de función, dado que el propósito último es la presentación de una innovación didáctica que ponga en el centro del debate la necesidad de trabajar valores morales en la enseñanza de las Matemáticas. No obstante, sí debemos hacer unas breves reflexiones sobre la elección de este concepto matemático como eje del problema que orienta nuestra secuencia innovadora.

La razón de incluir el concepto de función, y en particular el de función a trozos en el diseño de la secuencia, se basa en el hecho de que es uno de los conceptos que permean toda la matemática escolar. De acuerdo con Monk (1994), la comprensión del significado de este concepto es necesaria para acceder a otros conceptos clave, como los de límite, derivada e integral de una función. En la comprensión de este concepto existen, además, dificultades que van desde la comprensión del lenguaje algebraico hasta la trasposición entre registros de representación. En el caso del concepto de función a trozos, las dificultades en su comprensión pueden asociarse, también, a que el profesor, al introducir en sus clases el concepto de función, presenta una sola condición en el dominio de las funciones. Según Sford (1992), esta forma de comenzar a estudiar las funciones a trozos ocasiona que los estudiantes no logren comprender que una función puede tener varias notaciones algebraicas, asociadas a diferentes dominios de la función. Así pues, uno de los retos de los educadores matemáticos es proponer secuencias didácticas con las que ayuden a sus estudiantes a entender la definición de función de una manera amplia. Bloch (2003), por ejemplo, se basa en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) para elaborar una situación de enseñanza en la que estudiantes de Enseñanza Media centren su atención en la manipulación gráfica y el estudio de las propiedades de las funciones, así como en la producción y el cuestionamiento de enunciados sobre ellas.

MARCO PARA LA ELABORACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Para la elaboración de la secuencia didáctica se adoptó el enfoque socioformativo de las competencias propuesto por Tobón-Tobón, Pimienta-Prieto y García-Fraile (2010). Este enfoque prioriza la formación integral de las personas al vincularlas con el compromiso ético hacia otros miembros de la sociedad y «cambia la lógica de transitar por los contenidos a la lógica de la acción» (Tobón et al., 2010, p. 3). Este tránsito implica que el objetivo de la enseñanza no se restringe a la adquisición de contenidos e incluye habilidades de uso responsable del conocimiento. El enfoque socioformativo consiste en pretender que los estudiantes, al resolver problemas, tengan en cuenta el ámbito específico (por ejemplo, social, económico, familiar) en el que el contenido de esos problemas se ha pensado. Esta consideración tiene como finalidad la de involucrar, en sus soluciones, compromisos para el bienestar de la comunidad.

En el enfoque socioformativo, el docente es considerado como guía del proceso de aprendizaje que busca que todos los estudiantes desarrollen y refuercen las competencias que se ha propuesto enseñar. El profesor percibe al estudiante como un sujeto creativo y proactivo de su formación integral y de su aprendizaje. Se organiza la enseñanza para promover la participación de los estudiantes por medio de dinámicas de aula (por ejemplo, organización de equipos de trabajo). En estas, se promueve que los alumnos expresen sus razonamientos para resolver el problema, con la finalidad de no restringirse solo al contenido matemático, sino ampliarlo al de las implicaciones de las decisiones surgidas en el contexto del problema. Si el texto de un problema hace alusión a la máxima ganancia obtenida por una

empresa, el significado de máximo y mínimo de una función debe centrarse tanto en la definición de estos conceptos como en las repercusiones y consecuencias de lo que significa que una empresa tenga máximas (o mínimas) ganancias. En la siguiente sección exponemos cómo este enfoque fue utilizado para hacer que el aprendizaje del concepto de función a trozos pudiera transitar del aprendizaje del concepto a una reflexión sobre su relación con el significado del valor moral de justicia.

METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE LA INNOVACIÓN

La metodología para analizar las respuestas de los estudiantes fue de corte cualitativo, en su modalidad etnográfica. Una ventaja de esta metodología es que permite estudiar a los participantes en los ambientes en los que interactúan. En este sentido, dado que nuestra atención se centró en la forma en que los estudiantes proponían soluciones a un problema moral, se pensó el trabajo grupal en clase como ambiente propicio.

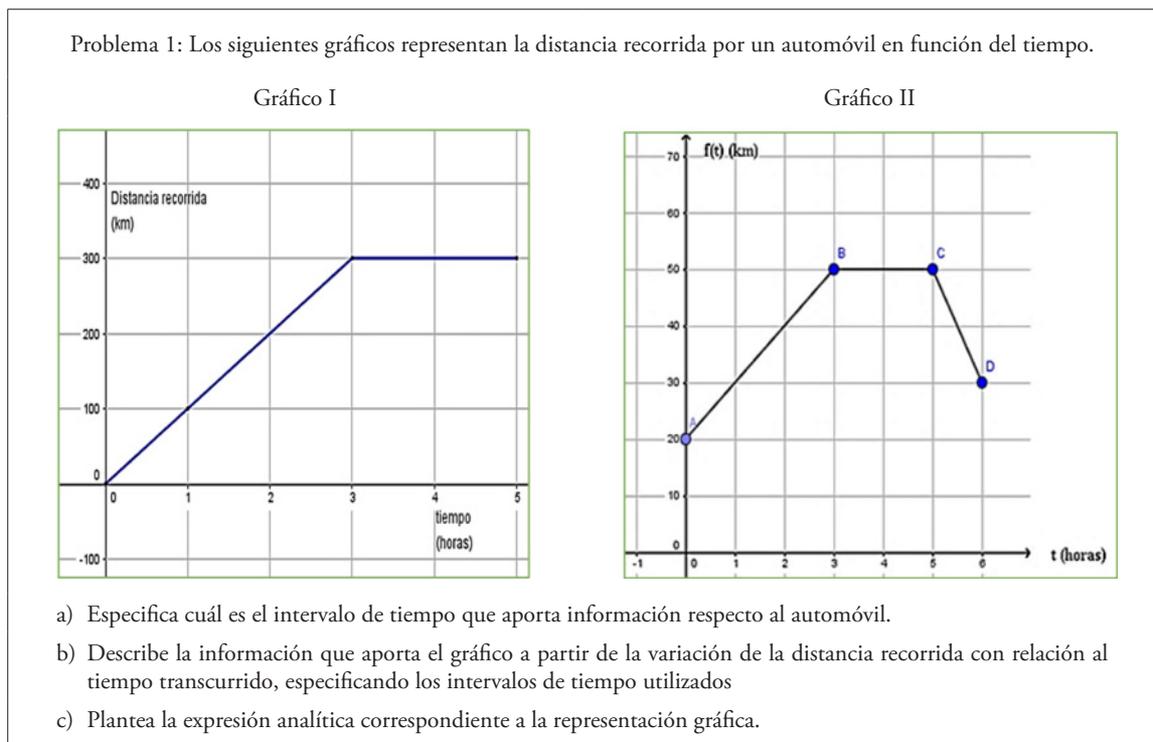


Fig. 1. El primer problema de la secuencia.

La secuencia didáctica se realizó con estudiantes (17-18 años de edad) de una clase de Matemáticas de tercer año de Educación Media de una escuela de Montevideo (Uruguay) al inicio del curso, cuando la profesora iniciaba el tema llamado «Análisis matemático». La recopilación de datos consistió en videograbación y posterior transcripción de las sesiones que constituyeron la secuencia, así como en la obtención de las hojas de trabajo de los estudiantes. La secuencia fue planificada para seis sesiones de noventa minutos cada una y constó de seis problemas y otras tareas, algunas para casa, pensadas para trabajar individualmente. En los primeros minutos de la primera sesión, la profesora expuso ejemplos de funciones continuas y discontinuas representadas mediante gráficas cartesianas que debían ser interpretadas. Durante los sesenta minutos restantes, los estudiantes debían responder a las preguntas del primer problema

(figura 1), que, como ocurrió con el resto de problemas, se trabajó en equipos de tres o cuatro estudiantes. Tras la segunda sesión y el segundo problema, en la tercera sesión se abordó el problema moral:

La empresa Ariel, por actividades excepcionales, realiza contratos específicos, según el tiempo trabajado por el trabajador. Así, si un trabajador es contratado menos de 6 horas, se le paga \$ 400 por cada hora o fracción de hora trabajada; si es contratado 6 horas o más, por considerarlo un trabajador muy calificado, la empresa realiza un pago de \$ 600 por cada hora o fracción de hora trabajada.

- Realiza un análisis de los datos para identificar la expresión analítica que modeliza el ingreso del trabajador según el número de horas trabajadas.
- Representa gráficamente el ingreso de cada empleado en función de las horas trabajadas.
- Averigua cuál es el ingreso de un trabajador que cumplió cinco horas por actividades excepcionales.
- Averigua el ingreso de un trabajador que cumplió siete horas por actividades excepcionales.

La gerencia hace una propuesta alternativa y plantea no pagar la fracción de cada hora trabajada. Modeliza mediante una función el sueldo pagado hasta 8 horas trabajadas y elabora una reflexión comparando los dos modelos propuestos por la empresa.

En las hojas de trabajo aparecían cuatro preguntas que los grupos de estudiantes debían responder relativas al contenido conceptual del problema (entre ellas, representar gráficamente el ingreso de cada empleado en función de las horas trabajadas). Una vez resueltas estas preguntas, los estudiantes debían atender un segundo grupo de preguntas relativas a la segunda opción de pago de la empresa. Para la última parte del problema se formaron nuevos equipos, de modo que uno representaría a un grupo de empresarios de Ariel (Equipo E) y otro a un grupo de trabajadores de la empresa (Equipo T). Las actividades destinadas a cada equipo eran las siguientes:

Preguntas e1, e2 y e3 para el equipo de empresarios

- El gerente va a contratar para trabajar a su hermano, ¿qué ofrecimiento laboral le haría vinculado a las dos propuestas que se han ofrecido en la empresa? Realiza una justificación de la gráfica ofrecida y su explicación.
- La empresa decide minimizar sus egresos, pues se encuentra en un momento de déficit. Justifica cuál es la propuesta que le conviene a la empresa.
- El gerente va a contratar a otro trabajador y quiere tener el menor egreso posible. ¿Qué propuesta le haría? ¿Le haría ganar lo mínimo posible a fin de maximizar sus ganancias? ¿Podrías hacer una conjetura (por medio de la gráfica) de la propuesta «utópica» que le plantea el contador de la empresa, para tener el mínimo de egresos con sus sueldos?

Preguntas t1, t2, t3, t4 y t5 para el equipo de trabajadores

- El sindicato va a convocar una reunión con la gerencia por reclamos salariales, ¿cuál crees que es la propuesta que harían para que el trabajador no se vea mermado en sus ganancias?, ¿por qué? ¿Crees que esto le beneficia a largo plazo?
- ¿Cuál de los gráficos crees que es más injusto? ¿Por qué?
- Imagina que eres el líder sindical, pero el dueño de la empresa es un primo. ¿Por qué propuesta te inclinarías? ¿Será justo para trabajadores y empresarios? ¿Consideras que se hará una propuesta que beneficie a ambas partes?
- Eres un trabajador que se preocupa por la justicia social. Has decidido explicar a tus compañeros el ofrecimiento real de la empresa y la nueva propuesta, ¿qué les dirías?
- Eres un sindicalista dispuesto a convencer a todos los trabajadores y hacer un trato en privado con el gerente de la empresa. ¿Qué convenio harías con la gerencia?

Con esta segunda parte del problema moral se busca propiciar que los estudiantes reflexionen sobre dilemas que, para comprenderse y resolverse, impliquen tanto el uso del concepto de función a trozos como el de valores morales específicos. La manipulación de funciones matemáticas no se dirige solo a obtener una solución numérica, sino a contribuir al argumento utilizado para elegir la opción que mejor resuelva el dilema. A diferencia de las preguntas del resto de los problemas de la secuencia, en cuyas respuestas debían usarse únicamente algoritmos matemáticos, las preguntas del problema moral contienen situaciones específicas con dilemas morales. Para resolver estos dilemas, los estudiantes debían hacer uso de juicios de valor como «justo» o «injusto».

ANÁLISIS DE RESPUESTAS AL PROBLEMA MORAL

Aunque nuestra atención se centró en analizar las respuestas del problema moral, cabe decir que los estudiantes, antes de resolverlo, tuvieron dificultades para obtener las gráficas correspondientes a las dos formas del pago salarial de la empresa. En lo que respecta a la primera forma de pago (por el tiempo diario trabajado, incluyendo fracciones de hora trabajada), algunos estudiantes no graficaron el intervalo de tiempo [5, 6]; algunos otros unieron, con una recta, los puntos extremos de este intervalo (figura 2, fotografías 1 y 2). En cuanto a la segunda forma de pago (por horas completas diarias, sin considerar fracciones de hora), algunos estudiantes no graficaron intervalos correspondientes a algunas horas específicas (figura 2, fotografías 3 y 4).

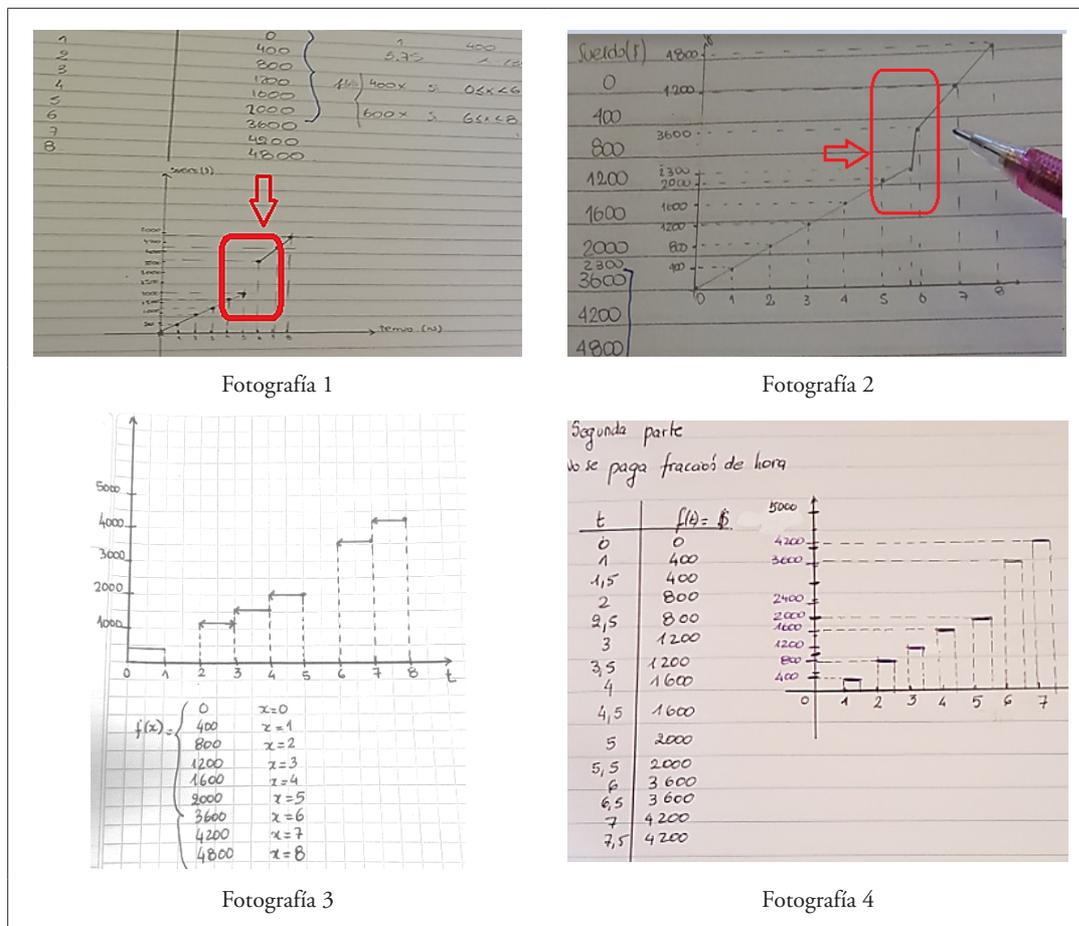


Fig. 2. Gráficas de estudiantes para representar formas de pago.

Terminar una recta hasta el punto con coordenada 5 h y comenzar otra a partir del punto con coordenada 6 h (figura 2, fotografía 1) puede deberse a la tendencia a utilizar solo números enteros en la representación tabular de la función. Esta misma tendencia se observa en las fotografías 3 y 4. Al no considerar la característica del conjunto dominio de la función (números reales), los números entre los intervalos carecen de sentido para ser graficados. Por otro lado, la acción de unir el punto de abscisa $5\frac{3}{4}$ h con el de abscisa 6 h (figura 1, fotografía 2) puede deberse a la tendencia documentada (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990) de unir los puntos aislados de una gráfica con una línea recta. Al notar estas dificultades, la profesora explicó cómo podrían observarse las gráficas de las propuestas salariales ofrecidas por la empresa (figura 3).

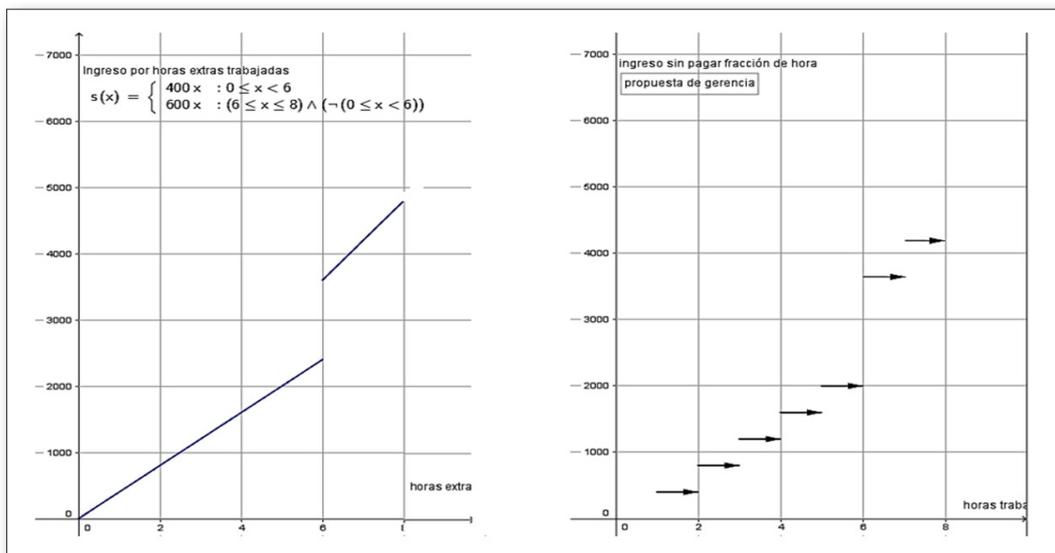


Fig. 3. Gráficas digitales que representan las gráficas de la profesora en la pizarra.

A partir de la visualización colectiva de los gráficos, la profesora motivó la reflexión sobre su significado. En esta etapa de la secuencia didáctica, no se había pedido a los estudiantes que relacionaran el significado de las funciones a trozos con la forma justa, o injusta, de pagar de la empresa. Sin embargo, las primeras reflexiones de los estudiantes se orientaron precisamente hacia el tema de si los trabajadores recibirían un pago justo por sus servicios. Los estudiantes se preguntaron si sería justo (o injusto) que existieran diferentes remuneraciones según la cantidad de horas trabajadas por día. También reflexionaron sobre el impacto de las decisiones individuales, independientemente de si esa decisión no está basada en consideraciones morales. Por ejemplo, un estudiante dijo: «Si no tengo otra propuesta de trabajo, me convendrá aceptar la propuesta de no pagarme la fracción de hora, aunque no sea justa. No puedo dejar a mi familia sin ningún ingreso, aunque no esté de acuerdo con lo que me van a pagar».

En esta respuesta transcrita se observa que la interpretación de la gráfica no solo está limitada al ámbito matemático, sino también al ámbito moral. El hecho de aceptar dinero por hora trabajada, y no por fracción de hora trabajada, aun cuando esta forma de pago le parezca injusta, indica que este estudiante, además de comprender la relación entre salario y tiempo, juzga la pertinencia de esta información con base en circunstancias de una situación hipotética de carácter moral. El involucramiento de juicios morales en la interpretación de las gráficas de la figura 3 se observa con claridad en cómo los estudiantes resolvieron las actividades elaboradas para empresarios y para trabajadores.

Análisis de la respuesta a la pregunta t1 de un equipo E y un equipo T

Después de trabajar la comprensión de las dos gráficas de la figura 3, la profesora pidió a los equipos E y T que respondieran e_1 , e_2 y e_3 , y t_1 , t_2 , t_3 , t_4 y t_5 , respectivamente. Centramos el análisis en la respuesta a t_1 de un equipo de trabajadores (Equipo T) y en la forma en que dicha respuesta desencadenó una discusión con un equipo de empresarios (Equipo E). En el intercambio de argumentos se elaboraron juicios de valor fundamentados en el contenido conceptual de las gráficas.

El Equipo T se concentró en elaborar una propuesta para incrementar los salarios de los trabajadores que cobraban en proporción a \$400 cada hora. Aseguraban que el pago de \$400 por hora podría significar pérdida de ingreso para el trabajador a fin de mes, pues si se contabilizaban las fracciones de hora trabajadas durante el mes (por ejemplo, el trabajador no ganaba un sueldo durante el periodo de 0 a 1 hora), esta suma no sería recompensada económicamente por la empresa. La profesora pidió al Equipo T que expusiera las razones de su propuesta a los integrantes del Equipo E. Este es parte del diálogo entre dos estudiantes de estos equipos:

- L1. Estudiante 1 del Equipo T: (*dirigiéndose al Equipo E*) Yo quiero que sea para todos los trabajadores proporcional a 600. Porque, de lo contrario, algunos trabajadores perderían dinero.
 L2. Profesora: ¿Qué piensa la empresa?
 L3. Estudiante 1 del Equipo E: ¡Horrible! Como empresa perderíamos mucho dinero, tal vez los trabajadores estén contentos, pero nosotros, como empresa, no. Cuando la empresa está en crisis no puedo subirle 200 pesos a cada sueldo de los trabajadores que se les paga proporcional a 400 pesos. Tal vez pueden hacer una hora menos.

Como se observa en el diálogo, la propuesta del Equipo T no solo permite que se beneficien los trabajadores que ganan \$400 por hora o por fracción de hora trabajada, sino también los que ganan \$600 por hora o por fracción de hora trabajada. Consideran que «lo justo» no es solo favorecer a unos cuantos trabajadores, sino a todos. Pero «lo justo» no necesariamente tiene el mismo significado para la empresa. Para la Estudiante 1 del Equipo E, el hecho de ganar \$600 por fracción de hora trabajada le resulta «horrible» (L3), pues si la empresa está en crisis (aquí, la estudiante pone en el tema de la discusión el supuesto de la pregunta e_2 : la empresa decide minimizar sus egresos ya que se encuentra en un momento de déficit), el beneficio del incremento de sueldo a los trabajadores, representado por la función $h(t)=600t$ (figura 4), significaría un perjuicio para las finanzas de la empresa (L3). Para evitar una posible pérdida económica de la empresa, el Equipo E hace una oferta al Equipo T. Esta consiste en pagar por fracción de hora, según la siguiente función (figura 4):

$$w(t) = \begin{cases} 400t & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 600t & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

Los estudiantes representantes de la empresa consideraron que un nuevo significado de «un salario justo» podría estar representado con la función $w(t)$. A diferencia de la función de pago original, la función w tiene la ventaja de pagar por fracción de hora, pero tiene la desventaja, según el Equipo T, de discriminar el esfuerzo de los trabajadores. Para resolver este conflicto de intereses, el Equipo E hace una tercera propuesta. Sugiere pagar de acuerdo con la función $f(t) = 500t$, $0 \leq t \leq 8$ (figura 4). En el siguiente extracto se observa cómo los estudiantes de ambos equipos discuten la conveniencia de esta nueva propuesta:

- L4. Estudiante 2 del Equipo T: Pero no me conviene, si ya me pagaban proporcional a \$600 [pago por fracción de hora].
- L5. Estudiante 2 del Equipo E: También pierdo yo, porque estamos en crisis. La reducción horaria no me sirve, pues tengo que contratar a otra persona.
- L6. Estudiante 2 del Equipo T: Tolero unos meses ganando proporcional a 500 pesos, pero cuando la empresa mejore su situación, que me paguen la diferencia para llegar a los 600 pesos la hora.
- L7. Estudiante 3 del Equipo T: A los que ganaban 400 [pesos] nos suben el sueldo, cuando la empresa recupere a los trabajadores que ganaban proporcional a 600 pesos que le paguen la diferencia y ahora acepten ganar proporcional a 500 pesos.

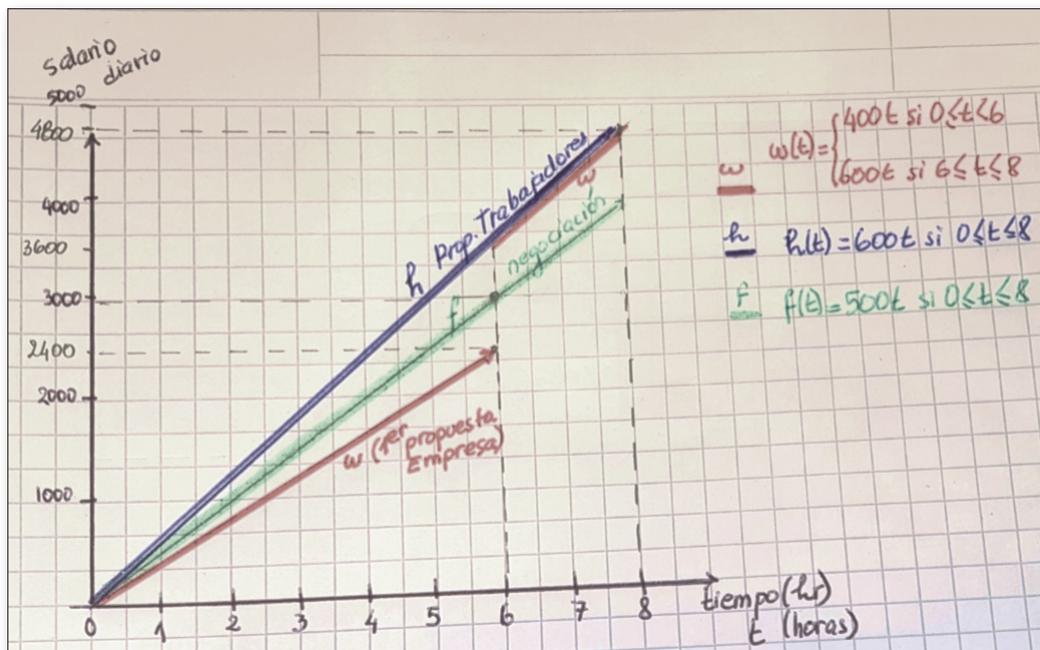


Fig. 4. Funciones de pago propuestas por los equipos E y T.

Los estudiantes centran su conversación en justificar lo que para ellos puede resultar «un pago justo». Lo interesante en esta justificación es que pretenden asociar el término *justo* con la representación gráfica de f , es decir, el concepto matemático de función parece representar un valor moral en esta discusión. No es casual que el valor de la pendiente (500) de la función f sea la mitad de la suma de las pendientes de h y de w . Más específicamente, en la discusión de los equipos E y T el comentario «un pago justo» de sueldo es significado por una función cuya pendiente se encuentra «a la mitad» de dos funciones que representan los extremos de dos propuestas de pago. Aun cuando la función f no convenga a algunos trabajadores (L4), el pago puede resultar «justo» si se tiene en cuenta que la empresa también se sacrifica (L5). Este sacrificio de obtener menos ganancias hace, a su vez, que el sacrificio de los trabajadores que ganan \$600 se vea igualado por el de la empresa. Parece que el sentido de igualdad, en cuanto al sacrificio que deben aceptar tanto empresarios como trabajadores, se asocia al de «pago justo». Este es el sentido que evoca la propuesta de la función f . Ahora bien, aun cuando f seguía representando una solución parcial al problema del «salario y ganancias justas», tenía para los estudiantes una significación simbólica del concepto de justicia. Esta forma de significar «lo justo» como el punto medio de dos opciones extremas puede servir de tema de inicio para que el profesor de matemáticas involucre a los estudiantes en reflexiones sobre el valor moral de justicia.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En este artículo se argumenta que el diseño de una secuencia de enseñanza orientada hacia el aprendizaje del concepto de función a trozos puede relacionarse con la enseñanza de un valor moral como el de «ser justo». El argumento principal consiste en que en el uso del concepto matemático se encuentre la discusión del valor moral. Del análisis de los datos se observa que los estudiantes, además de interpretar la función a trozos, propusieron funciones cuyo significado estuviera asociado al de «ser justo». La innovación radica en que los problemas no solo permitieron que los estudiantes manipularan el concepto de función, sino también que elaboraran una reflexión sobre las implicaciones de esa manipulación en relación con las personas que los rodean. Proponer funciones que representaran «un salario justo» llevó a usar el concepto de función a trozos y discutir la importancia de responsabilizarse sobre las repercusiones morales y económicas involucradas en ese uso (por ejemplo, cuando un equipo T decidió incrementar el sueldo de los trabajadores que ganan menos pero no contempló la repercusión de la disminución salarial de otros trabajadores). Dicha reflexión fue lograda al elaborar preguntas cuyas respuestas implicaron que la manipulación conceptual tuviera que estar relacionada con situaciones en las que fuera necesario elegir entre dos opciones cuyos adjetivos *justo* e *injusto* dependieran del rol específico de los estudiantes en las actividades para empresarios y trabajadores; es decir, la respuesta de los estudiantes no solo consistió en proponer nuevas funciones, sino en que esas funciones representaran una «actuación justa». Pedir a los estudiantes que jugaran un rol, situándolos en posiciones hipotéticas como las de trabajadores y empresarios, motivó el significado matemático y moral del concepto de función. En sus respuestas, los estudiantes mostraron que el rol adoptado les permitió vincularse con los beneficios o perjuicios que sus decisiones sobre la modificación del concepto de función pudieron implicar en otras personas. *Ponerse en el lugar de otros* permitió así que la manipulación del concepto matemático no solo estuviera supeditada al «saber hacer», sino también al «saber ser».

Desde el punto de vista didáctico, la elaboración de nuestra propuesta puede servir como punto a partir del cual el profesor reflexione sobre: 1) la importancia de utilizar distintas representaciones del concepto de función a trozos (por ejemplo, la gráfica y la analítica) con la finalidad de enfatizar que la información obtenida en una representación puede ser más clara de obtener que con otra (por ejemplo, la información del sueldo por hora o por fracción de hora es más clara en la representación gráfica que en la analítica); 2) el significado de conceptos morales como el de justicia (por ejemplo, el significado de un salario justo). Esta segunda reflexión propiciaría estrechar la coordinación entre profesores de distintos cursos. Con base en la necesidad de hacer que el sueldo fuera justo tanto para empresarios como para trabajadores, el profesor del curso de ética (o de filosofía) podía comenzar con la discusión sobre la manera de abordar el concepto de justicia en diferentes corrientes filosóficas. Se podría entonces concatenar la propuesta de un pago justo, representado por medio de una función cuya pendiente estuviera entre dos funciones (figura 4), según el modo en que Aristóteles explica cómo la relación entre individuos debe ser justa. Este filósofo propone que un tipo de justicia puede aplicarse a la distribución de bienes entre los miembros de una comunidad (justicia distributiva) y otro a la relacionada con los tratos que establecen los individuos (justicia correctiva). Él explica la justicia distributiva como una proporción geométrica, mientras que la justicia correctiva la asemeja a una progresión aritmética (*Ética de Nicómaco*, 1130b30-1132b20). Esta semejanza entre las respuestas de los estudiantes a las preguntas del problema moral y la explicación de Aristóteles puede ser utilizada como una herramienta didáctica para unir temas matemáticos a temas morales.

Futuras experimentaciones son necesarias para proponer marcos teóricos con los que se puedan organizar cursos completos de Matemáticas y no solo clases específicas, en los que esta asignatura sirva para estudiar acciones humanas. Una propuesta que nos parece interesante y que apunta en esta dirección es la elaborada por Gutstein (2006). Por otro lado, convendrá examinar cómo otros conceptos

matemáticos pueden ser organizados en secuencias didácticas, de tal manera que se aborden valores morales. Además, se requieren estudios que puedan aportar evidencias sobre la forma en que los procesos de aprendizaje de las Matemáticas influyen en los procesos de aprendizaje de otras disciplinas.

AGRADECIMIENTO:

Esta investigación fue apoyada por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN por medio del proyecto SIP20195628.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bishop, A. J. (2008). Mathematics teaching and values education: An intersection in need of research. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education. Major contributions of Alan Bishop* (pp. 231-238). Nueva York: Springer.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 3-28.
<https://doi.org/10.1023/A:1023696731950>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y S. Warfield, Trads.). Londres: Kluwer.
- Buzzelli, C. A. y Johnston, B. (2002). *The moral dimensions of teaching: Language, power, and culture in classroom interaction*. Nueva York: Routledge Falmer.
- Díaz-Quezada, V. y Poblete-Letelier, A. (2013). Resolución de problemas en matemáticas y su integración con la enseñanza de valores éticos: El caso de Chile. *Boletín de Educação Matemática* 27(45), 117-141.
- Díaz-Quezada, V. y Poblete-Letelier, A. (2014). Resolución de problemas en matemáticas desde la transversalidad: Educar en valores éticos. *Paradigma*, 35(2), 155-182.
- Falkenberg, T. (2006). Moral education in the teaching of mathematics. En J. Novotná, H. Moraova, M. Kratka y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 49-56). Praga: PME.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics. Toward a pedagogy for social justice*. Londres: Routledge.
- Hansen, D. T. (2001). Teaching as a moral activity. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4.ª ed.) (pp. 826-857). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
<https://doi.org/10.2307/1170224>
- Monk, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network*, 9(7), 21-27. <https://doi.org/10.5642/hmnj.199401.09.07>
- Planas, N. (2011). Language identities in students' writings about group work in their mathematics classroom. *Language and Education*, 25(2), 129-146.
<https://doi.org/10.1080/09500782.2011.552725>
- Planas, N. y Civil, M. (2009). Working with mathematics teachers and immigrant students: An empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(6), 391-409.
<https://doi.org/10.1007/s10857-009-9116-1>

- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Nueva York: Mathematical Association of America.
- Sigarreta, J. y Laborde, J. M. (2003). Modelo didáctico para la formación axiológica a través de la resolución de problemas matemáticos. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 4(1). <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/download/2300/2091>. Visitada el 23-09-2019.
- Sigarreta, J. y Torres, J. (2003). Utilización de los problemas matemáticos en la formación de valores. *Revista EMA*, 8(2), 208-225.
- Tobón-Tobón, S., Pimienta-Prieto, J. y García-Fraile, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. Ciudad de México: Pearson.
- UNESCO (2016). *Marco conceptual para la evaluación de competencias*. http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/ipr4-roegiers-competenciesassessment_spa.pdf. Visitada el 23-09-2019.

An innovative proposal for the inclusion of moral values in mathematics teaching

Isaias Miranda

Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria

Ciudad de México, México

imirandav@ipn.mx

Elena Glenda Freire Gard

Instituto de Profesores Artigas-Consejo de Formación en Educación

Montevideo, Uruguay

efreire@docente.ceibal.edu.uy

In a mathematics class, it is unusual for mathematical concepts to be related to moral values. This can be clearly observed in the design of the curricula of both Mathematics and Civic Education, Philosophy or Ethics courses. The two curricula do not seem to have common contents with each other. The main argument for this distinction is that mathematical concepts do not symbolize moral values, which can only be perceived through specific human actions. However, some researchers in mathematics education devote part of their studies to show that the impossibility of relating the two curricula is only apparent. Their efforts are focused on proposing either didactic sequences to motivate the development of values such as honesty and responsibility, or frameworks of analysis to incorporate into teaching a vision of social justice when working with students. We intend to contribute to the first of these efforts.

The aim of this article is twofold: 1) to document the design of an innovative teaching sequence that links problems about the concept of piecewise function with questions involving moral dilemmas (dilemma-questions); 2) to analyze how middle school students (17-18 years old) establish a relationship between the mathematical concept and specific moral values when responding to the dilemma-questions. The methodology used to elaborate the sequence was based on considerations of a socio-formal perspective of the learner. This perspective consists in expecting students to consider the specific context (e. g. social, economic, family) in which the content of those problems has been conceived. The purpose of this consideration is to engage students in commitments that ensure the well-being of the community. In this way, the sequence propitiates both the learning of mathematical concepts and a discussion on the consequences of human behavior. The sequence was implemented at the beginning of the mathematical analysis topic of the course; it consisted of six problems to solve during the class and tasks that were meant to be solved at home. The elaboration of the sequence is mainly characterized by having a problem (named Moral Problem) whose dilemma-questions make students think about the consequences of their own mathematical manipulations. Consequently, any mathematical result they achieved had to be understood in terms of the moral valuations each student had to make within the specific context of the dilemma-questions. Analysis was made on the basis of students' written and spoken discourse during class. In particular, the students' verbal answers to the Moral Problem dilemma-questions were analyzed together with the mathematical manipulations of the piecewise function that gave support to those answers.

The results indicate that, in answering the dilemma-questions, students manage to manipulate the concept of piecewise function in terms not only of its mathematical meaning, but also of its moral value involved. It was observed that students assigned a just or unjust value to the manipulated function according to the implications this manipulation had in the specific context of the dilemma-questions. In this sense, the analysis shows that students' learning of the concept of piecewise function is presented in their way of interpreting it from both the mathematical meaning and the moral sense the students bestowed upon it. In addition to being used as a starting point from which the teacher may discuss of the many ways to represent the concept of piecewise function, this innovative proposal may encourage the articulation of mathematical subjects with subjects from other disciplines. We even claim that the didactic sequence presented here can serve as a basis to ensure interdisciplinary teaching approaches, combining Mathematics with Civic Education, Philosophy or Ethics.

