ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.2 (2018): 105-123
Investigaciones didácticas

https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria

Connections between knowledge of mathematics teaching and knowledge of features of learning mathematics: the case of a high-school teacher

Diana Zakaryan, Soledad Estrella, Gonzalo Espinoza-Vásquez, Sergio Morales, Raimundo Olfos
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
diana.zakaryan@pucv.cl, soledad.estrella@pucv.cl, gonzalo.espinoza.v@gmail.com, sergio.morales.candia@gmail.com, raimundo.olfos@pucv.cl

Eric Flores-Medrano
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México
eflores@fcfm.buap.mx

José Carrillo
Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@uhu.es

RESUMEN: El conocimiento del profesor es reconocido como un factor relevante de su desempeño profesional y para promover el aprendizaje de la matemática de sus alumnos. Este artículo profundiza en el conocimiento del profesor y estudia las relaciones entre subdominios del conocimiento didáctico del contenido del modelo denominado *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Se buscan relaciones entre el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* y el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* de una profesora de secundaria en el contenido de semejanza de triángulos, a través de observaciones de aula y entrevista. Los resultados del estudio permiten vincular la investigación y la práctica del profesor, en tanto dan cuenta de las relaciones específicas entre subdominios y sus categorías, y cómo estas propician decisiones en el aula.

PALABRAS CLAVE: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, semejanza de triángulos, profesores de matemática, educación secundaria.

ABSTRACT: A teacher's knowledge is considered a significant factor contributing to their classroom performance and the promotion of mathematics learning in their students. This paper examines the knowledge deployed by a secondary teacher when working on the topic of similarity of triangles, focusing on the connections between subdomains within Pedagogical Content Knowledge in the model *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Specifically, drawing on data from lesson observations and interviews with the teacher, it considers connections between the subdomains *knowledge of mathematics teaching* and *knowledge of the features of learning mathematics*. The results underline the relationship between research and practice, in that they bring to the fore specific connections between subdomains and their related categories and illustrate how these contribute to classroom decisions.

KEYWORDS: knowledge of mathematics teaching, knowledge of features of learning mathematics, similarity of triangles, mathematics teachers, secondary education.

Recepción: febrero 2018 • Aceptación: abril 2018 • Publicación: junio 2018

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 105-123.

INTRODUCCIÓN

En las investigaciones y reportes nacionales e internacionales existe consenso acerca de que el sólido conocimiento del profesor es un componente principal de su desempeño profesional (Ball, Thames y Phelps, 2008; Tatto *et al.*, 2008). La discusión acerca de en qué consiste ese sólido conocimiento, aunque no es unánimemente consensuada, ha contribuido al desarrollo de distintas conceptualizaciones del conocimiento del profesor (Godino, Batanero y Font, 2007; Ball *et al.*, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), y principalmente concuerda con la propuesta seminal de Shulman (1986), en cuanto a considerar el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido que se ha de enseñar. Si bien las distintas conceptualizaciones del conocimiento diferencian el conocimiento del profesor en subdominios y categorías con fines analíticos, consideran este integral y relacionado (e.g. Llinares, 1999).

En este estudio se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y se comparte la importancia de que el profesor tenga conocimientos tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas (Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013; Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015) y se aboga por la necesidad de estudiar relaciones entre ellos. Debido a la falta de estudios que den cuenta de la relación que guardan estos conocimientos en la acción del profesor, resulta relevante vincular la investigación de una forma directa con la práctica del profesor (Sosa *et al.*, 2015).

El objetivo del estudio es establecer y describir relaciones entre el conocimiento del profesor de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, ambos subdominios del conocimiento didáctico del contenido del modelo denominado *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, por sus siglas en inglés, Carrillo *et al.*, 2013).

El estudio del conocimiento del profesor sobre las características del aprendizaje de las matemáticas es relevante dado que permite comprender cómo el profesor anticipa las formas de pensar de los estudiantes, cómo interpreta sus producciones y el lenguaje matemático utilizado, cómo identifica y aprovecha las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Sosa *et al.*, 2015). Por otra parte, el estudio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas permite comprender las decisiones del profesor a la hora de usar estrategias, ejemplos potentes, analogías y recursos didácticos, entre otros (e.g. Carrillo *et al.*, 2013).

En este sentido, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) consideran dimensiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que sintonizan con las acciones mencionadas en el párrafo anterior: conocer a los estudiantes como personas que piensan y aprenden, diseñar y gestionar entornos de aprendizaje, desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso como parte de la «enseñanza para la comprensión». Por su parte, Pino-Fan y Godino (2015) presentan las acciones y dimensiones anteriormente mencionadas bajo la denominación *facetas* de conocimiento del profesor relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las cuales están referidas al conocimiento sobre aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva), conocimiento sobre aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva), conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional) y conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional). Asimismo, la investigación sobre la instrucción matemática efectiva de Baumert *et al.* (2010) destaca el conocimiento de las tareas matemáticas para el aprendizaje, la comprensión de las concepciones de estudiantes (concepciones erróneas, errores típicos, estrategias frecuentes) y el conocimiento de múltiples representaciones y explicaciones.

Por otra parte, si bien los modelos mencionados han hecho el esfuerzo por especificar las componentes del conocimiento del profesor de matemáticas, quedan abiertas preguntas acerca de cómo se relacionan entre sí estas componentes (e.g. Pino-Fan y Godino, 2015). Dada la relevancia de estos subdominios del conocimiento del profesor (el conocimiento del profesor de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas), aún es escasa la investigación de cómo se relacionan en la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula, identificando conocimientos involucrados en la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje que tienen relevancia teórica debido a su capacidad explicativa, y considerando la naturaleza situada del conocimiento del profesor, lo cual da sentido para estudiarlo en un tema concreto (Llinares, 1996; 1999).

Así, en el aula, al usar alguna estrategia para la enseñanza de un determinado contenido, ¿están condicionadas las decisiones del profesor por su conocimiento de las características de aprendizaje de ese contenido?, ¿qué conocimiento rige al profesor a la hora de proponer una u otra tarea para abordar cierto concepto matemático?, ¿está involucrado el conocimiento de cómo se aprende ese concepto o de las expectativas de los alumnos respecto al concepto? Este tipo de interrogantes permiten acercarse a las relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de características de aprendizaje de las matemáticas del profesor, y ahondar en la comprensión de esta compleja y dinámica red de relaciones del conocimiento del profesor.

Aunque existen investigaciones que han identificado relaciones entre subdominios del MTSK (e.g. Escudero-Ávila, 2015; Zakaryan y Ribeiro, 2016), no se ha profundizado en estas relaciones. Por ejemplo, en Zakaryan y Ribeiro (2016) se han identificado relaciones entre el conocimiento de la enseñanza de los números racionales de una profesora de enseñanza básica (alumnos 13-14 años) y otros subdominios del MTSK, incluyendo su relación con el conocimiento de las características del aprendizaje de dicho contenido. No obstante, se requieren más estudios al respecto que permitan ampliar el conocimiento acerca de dichas relaciones y enriquecer la comprensión sobre el conocimiento del profesor, aportando elementos para su desarrollo.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta investigación, para explorar relaciones entre el conocimiento del profesor acerca de las características del aprendizaje de las matemáticas y acerca de la enseñanza de las matemáticas, se utiliza el modelo MTSK, que conceptualiza el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo *et al.*, 2013).

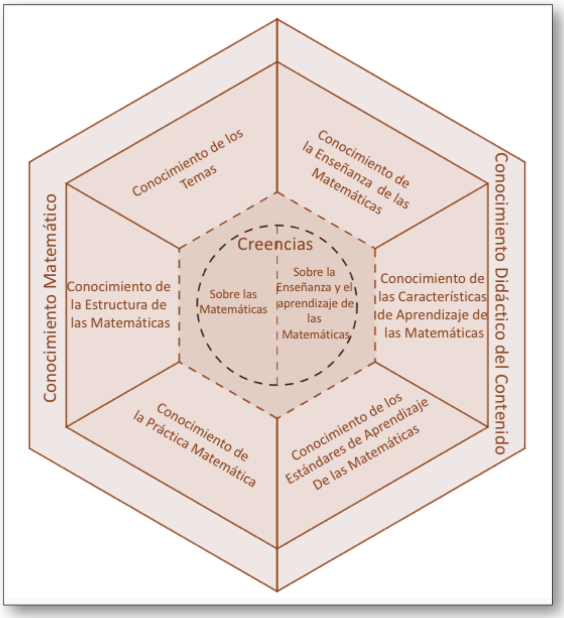


Fig. 1. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al.*, 2013).

El MTSK comprende exclusivamente aquellos conocimientos del profesor que tengan relación directa con el contenido matemático. De esta manera, no se consideran como parte del conocimiento especializado el conocimiento de técnicas de control del grupo o de trabajo en equipo (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes y Carrillo, 2014), sin que esto signifique una denostación de estos. Bajo esta definición, los dominios de conocimiento que conforman el modelo son el *Conocimiento matemático* y el *Conocimiento didáctico del contenido*. El Conocimiento matemático considera el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas y el conocimiento de la práctica matemática; el Conocimiento didáctico del contenido incluye el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se describen en detalle los dos subdominios y sus categorías que sirvieron como base para esta investigación.

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (CCAM) es el conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de aprendizaje. Se trata del conocimiento de los fenómenos que se producen cuando una persona aprehende el contenido matemático. Este subdominio no considera el conocimiento del profesor acerca de las características intrínsecas del sujeto cognoscente (e.g. Ball *et al.*, 2008), dado que este requiere conocimientos de otra índole (e.g. psicopedagógico), los cuales no son coherentes con la definición propuesta por el MTSK para la noción de especializado.

Las categorías para el CCAM se han construido a partir de la revisión de literatura (e.g. Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino *et al.*, 2007; Tatto *et al.*, 2008), que permitió ampliar la comprensión de la naturaleza del subdominio y los fenómenos en los cuales se refleja dicho conocimiento, y de evidencias empíricas que aportaron a la generación de las siguientes categorías (e.g. Sosa *et al.*, 2015):

1. *Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático*: se asume que el profesor conoce una serie de teorías que explican y dan sentido al aprendizaje (o no) de los contenidos matemáticos. Algunas de las teorías pueden ser (o coincidir en esencia con) teorías institucionalizadas de la Didáctica de la Matemática (e.g. descomposiciones genéticas o modos de pensamiento). Además, el profesor construye, sobre la base de su experiencia o ayudado de la experiencia de otros profesores, teorías personales (incluso al nivel de explicaciones) para el aprendizaje de las matemáticas. Dichas teorías, tanto las institucionalizadas como las personales, pueden ser locales (teorías que explican cómo se aprende un contenido específico) o globales (teorías de cómo se aprende matemáticas, como APOE –Arnon *et al.*, 2014–), dependiendo del alcance que el profesor asigne a estas.
2. *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*: independientemente de la forma en la que se enseñe, es posible identificar algunos contenidos matemáticos que los alumnos suelen aprender con más facilidad que otros. Por ejemplo, se espera que los conceptos asociados a contenidos que tienen una cantidad amplia de temas matemáticos previos (e.g. teorema de Thales) serán más complicados de entender que aquellos en que los requerimientos iniciales son menores (e.g. proporcionalidad de trazos). Este tipo de conocimiento, así como el conocimiento sobre errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a los temas concretos, o de potencialidades para el aprendizaje asociadas a un contenido matemático previo, se consideran en esta categoría. Por ejemplo, un profesor puede conocer que un error común de los alumnos es plantear proporciones sin considerar elementos homólogos.

3. *Formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje*: el conocimiento que permite al profesor atribuir sentido a las respuestas y producciones de alumnos, el conocimiento acerca de los procesos y estrategias de los alumnos, tanto los típicos como los no habituales, y el conocimiento sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un contenido determinado (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013) se consideran en esta categoría. Por ejemplo, el conocimiento del profesor de que los alumnos, para comprobar que dos triángulos son semejantes, habitualmente plantean razones entre las medidas mayores y las menores.
4. *Intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático*: el conocimiento sobre las expectativas e intereses de los alumnos con respecto a las matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre el área de las matemáticas que suele causar predisposición en alumnos, ya sea por concebirla difícil o fácil, por ejemplo, la geometría en comparación con el álgebra (García y Dueñas, 2014). También se considera el conocimiento sobre las expectativas a corto, medio y largo plazo de los alumnos acerca de las matemáticas en general y de contenidos particulares.

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (CEM) considera el conocimiento de recursos materiales o virtuales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la enseñanza, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado.

Las categorías para este subdominio han sido construidas basándose en evidencias empíricas (e.g. Flores-Medrano, 2015; Escudero-Ávila, 2015), realizando previamente una cuidadosa revisión de la literatura (e.g. Godino *et al.*, 2007; Hill *et al.*, 2008; Llinares, 1999), que permitió facilitar la comprensión de la naturaleza de este y de las acciones del profesor en las cuales se manifiesta dicho conocimiento:

1. *Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático*: el profesor puede conocer o construir teorías para la enseñanza de las matemáticas. Se consideran desde métodos rígidos de pasos hasta estructuras más complejas, como las que se describen en algunas teorías institucionalizadas (e.g. teoría de situaciones didácticas).
2. *Recursos didácticos para la enseñanza de un determinado contenido*: todos los materiales que se emplean para la enseñanza, virtuales o materiales, tienen ciertas características matemáticas (potencialidades y limitaciones para la enseñanza de un determinado tema) que les permiten convertirse en instrumentos para la enseñanza. Así, no bastaría con que un profesor supiera utilizar GeoGebra para dar muestra de un conocimiento en esta categoría, además necesita conocer características propias del *software* que permiten enseñar un determinado tema (e.g. el dinamismo para la construcción de triángulos semejantes).
3. *Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*: el conocimiento sobre en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los alumnos, qué ejemplos, analogías, metáforas, explicaciones, etc., son más potentes de acuerdo con el momento e intencionalidad de la clase, así como conocer tareas específicas para propiciar el aprendizaje de un contenido matemático. Por ejemplo, conocer características didácticas del ejemplo y técnicas de andamiaje.

METODOLOGÍA

Con el fin de establecer y describir las relaciones entre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que pone en juego una profesora de matemáticas al impartir el contenido de semejanza de triángulos, se ha realizado un estudio de caso (Stake, 2007) desde el enfoque interpretativo, considerando el conocimiento del profesor como un objeto de estudio complejo y situado.

Indagamos acerca del conocimiento de una profesora de matemáticas (en adelante Eva) del décimo grado (alumnos entre 14 y 15 años) de una escuela pública chilena. La selección del caso responde a que Eva, además de haber sido la mejor egresada de su promoción de la carrera de Pedagogía en Matemática, posee un magíster en Didáctica de la Matemática. En el momento del estudio, Eva contaba con tres años de experiencia en aula, habiendo impartido clases en décimo grado en los dos últimos años. Eva forma parte de un grupo de estudio de clases (Isoda y Olfos, 2009) en su escuela, en el que los profesores se reúnen periódicamente para reflexionar sobre sus prácticas docentes con el fin de mejorarlas en la acción. Estas características académicas de Eva hacen previsible que posea conocimientos ricos en elementos de los subdominios objeto de estudio, lo que permitiría profundizar en sus relaciones.

Recogida y análisis de datos

Los datos recolectados del estudio provienen de dos fuentes: videograbación de las sesiones de las clases de Eva y una entrevista semiestructurada posterior al análisis de las sesiones.

Con el método *observación no participante* (Cohen y Manion, 2002), se han grabado en video las siete sesiones dedicadas al contenido de semejanza de triángulos. Los datos obtenidos han sido transcritos y divididos en unidades de análisis que corresponden a las comunicaciones orales y escritas de la profesora y de sus alumnos. A partir del *análisis de contenido* (Bardín, 1996), cada investigador ha analizado individualmente la transcripción de las sesiones, identificando las unidades de análisis asociadas a los subdominios en cuestión y considerando la diferenciación entre *evidencia* e *indicio* de conocimiento.

Una *evidencia* es un elemento que permite afirmar la presencia de un conocimiento del profesor, ya sea superficial o profundo. Mientras un *indicio* es una sospecha de la existencia o no de un conocimiento causada por alguna declaración o acto del profesor; este requiere información adicional para que la sospecha se confirme como *evidencia* (Flores-Medrano, 2015).

Seis investigadores analizaron y codificaron las unidades de análisis sobre las categorías de los subdominios CEM y CCAM y precisaron las que presentaban *evidencias* e *indicios* de conocimiento. Posteriormente, se compararon sus análisis y discutieron para alcanzar un consenso sobre el subdominio, la categoría correspondiente y la diferenciación entre *evidencia* e *indicio*. Las unidades de análisis identificadas como *indicio* fueron incorporadas en la entrevista y confirmadas como *evidencia* de la categoría. En este reporte se incluyen las *evidencias* confirmadas y las previamente identificadas. Este análisis fue validado por un juez externo experto en el tema.

Otra fuente del estudio ha sido la entrevista semiestructurada a Eva, para la realización de la cual se elaboró una guía que incluyó preguntas y episodios videograbados de las sesiones, elegidos desde el análisis de las transcripciones, con el fin de estimular el recuerdo. La entrevista fue aplicada por tres investigadores: un investigador se enfocó en el planteamiento de las preguntas de la guía, otro se ocupó de complementar con preguntas que surgían *in situ* y el tercero se encargó de su grabación. El análisis de la transcripción de la entrevista se enfocó en profundizar en la comprensión de los subdominios del conocimiento estudiado y en la búsqueda de evidencias de su manifestación.

RESULTADOS

En este apartado se describen las relaciones establecidas entre el CCAM y el CEM de Eva.

Relaciones entre las categorías (ii) y (iii) del CCAM y la categoría (iii) del CEM

En el siguiente extracto se observa el conocimiento de Eva sobre el vocabulario común para referirse a triángulos semejantes, usa la palabra *parecidos*, categorizada como conocimiento de formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático dentro del subdominio del CCAM.

Eva ¿Qué relación hay entre los triángulos? ¿Estos triángulos son totalmente iguales?
[Dibuja en la pizarra dos triángulos semejantes con las medidas de ángulos y lados].
Al No.
Eva ¿Son totalmente iguales?
Als No.
Eva ¿Sí o no? Repasemos. ¿Tienen los mismos ángulos?
Als Sí.
Eva ¿Tienen la misma medida de los lados?
Als No.
Eva Usted podría decir: ¿igual o parecidos?
Als Parecidos.
Eva Parecidos. Y ese concepto *parecidos* matemáticamente tenía un nombre que lo definimos. ¿Qué término era ese? ¿Qué concepto?
Al Triángulos semejantes.

Efectivamente, para evocar en los alumnos el concepto de semejanza, Eva recurre al lenguaje común y familiar para los estudiantes, «igual o parecido» [870-872], tratando de establecer conexiones entre el vocabulario común y el concepto definido matemáticamente [872-873].

En otro momento, el conocimiento del lenguaje y vocabulario coloquial se evidencia cuando Eva usa la palabra *igualitos* para el concepto de congruencia.

Eva En esa clasificación que teníamos también había triángulos que tenían los mismos ángulos y tenían igual medida en los lados. ¿Se acuerdan que también había unos que eran igualitos? Esos triángulos se llaman triángulos congruentes. Para decir que son igualitos, igualitos, se usa el concepto *congruente*.

Con relación a este extracto, cuando en la entrevista se le preguntó a Eva a qué se debe el uso de estas palabras, ella respondió:

> El «igualito» es para no usar la palabra coincidente o congruente. Claro, que lo he repetido en el sentido de que tal vez no me interesa tanto en su mente el símbolo de la congruencia, la palabra *congruencia*, sino que sepan qué significa. El significado, efectivamente, es que son «igualitos, igualitos», así mismos.
>
> Y el parecido es para diferenciar ambas cosas, porque resulta que a veces cuando ellos saben solo el concepto de semejanza no logran darse cuenta de que hay un caso particular que es la congruencia, porque al final igual son semejantes, pero es un caso particular.

¿De qué forma estas palabras, parecido *o* igualito*, afectan positiva o negativamente al aprendizaje de los alumnos?*

> Tal vez, cuando ellos lo vean en pruebas estandarizadas, en otros contextos, en libros, no van a aparecer esas palabras sencillas, sino palabras como *coincidentes*, *congruentes* u *homólogos*. Me doy cuenta de que según el tipo de alumno las cosas que uno puede hacer, al menos con el tipo de alumno que yo tengo, creo que es más fácil las palabras más cercanas. Si yo busco en el cuaderno, probablemente tienen semejanza y congruencia, pero cuando les pregunte, probablemente usen las palabras *parecido* o *igualito* porque es más cercano para ellos.

Se observa el conocimiento de Eva acerca de la conveniencia de usar como estrategia el cuestionamiento a los alumnos, basado en el desglose de las características definitorias del concepto –*igualito* y *parecido*– para la enseñanza de la semejanza de triángulos, categoría (*iii*) del CEM. Eva conoce el vocabulario familiar de los alumnos: *igualito* para congruencia y *parecido* para semejanza, categoría (*iii*) del CCAM. Además, el conocimiento de las dificultades de los alumnos para el uso de conceptos formales (e.g., congruencia, homólogo, coincidente), categoría (*ii*) del CCAM, contribuye al uso de esa estrategia.

Tabla 1.
Relaciones entre las categorías (*ii*) y (*iii*) del CCAM y la categoría (*iii*) del CEM

Subdominio	*CCAM*		*CEM*
Categoría	(*ii*) Fortalezas y dificultades	(*iii*) Formas de interacción	(*iii*) Estrategias, técnicas y tareas
Indicador	Conoce las dificultades de los alumnos para el uso de conceptos de congruencia y semejanza	Conoce lenguaje y vocabulario común: igualito y parecido para congruente y semejante	Conoce estrategia del cuestionamiento a los alumnos, basado en el desglose de las características definitorias del concepto –igualito y parecido–

En esta tabla se presentan relaciones establecidas entre las categorías del CCAM: (*iii*) formas de interacción con el contenido matemático y (*ii*) fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, y la categoría del CEM (*iii*) estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.

Relaciones entre la categoría (iv) del CCAM y la categoría (iii) del CEM

En el siguiente extracto, Eva hace uso de una analogía (CEM), ampliación de letras en Word, para enfatizar la aplicación del concepto de semejanza en aplicaciones digitales en la vida cotidiana. De este modo, da *indicio* de su conocimiento acerca de los intereses de los alumnos sobre el aprendizaje de las matemáticas (CCAM).

> 877 Eva El concepto de semejanza no solo se aplica en triángulos, por ejemplo, cuando
> 878 uno en el Word tiene una letra y la empieza a agrandar. Las letras que van saliendo
> 879 también son semejantes a la primera porque se conserva la forma, pero se va
> 880 agrandando, o sea, solo varían las medidas, igual que acá [trabajan en la pizarra].

En la entrevista, a la pregunta acerca de *lo esencial en la enseñanza de la semejanza de triángulos*, Eva menciona algunas aplicaciones del concepto de semejanza que usan los alumnos:

> Sus aplicaciones en la vida cotidiana. Hay que aprovecharse de esa unidad porque no todas las unidades que uno pasa tienen esa gracia. Hay matemática que aprendemos porque es matemática, creo que la semejanza

> da mucho pie para ver cosas que sí usan [los alumnos], el Word para agrandar las letras, las imágenes cuando las agrandas y cuando las achicas, en las maquetas cuando hacen modelos a escala, en los mapas. Entonces hay tantas cosas que uno puede asociar que siento que es fundamental que se haga en esa unidad.

La respuesta de Eva da *evidencia* del conocimiento de los intereses de los alumnos sobre el aprendizaje de las matemáticas, lo que confirma el *indicio* anterior.

Tabla 2.
Relaciones entre la categoría (*iv*) del CCAM y la categoría (*iii*) del CEM

Subdominio	*CCAM*	*CEM*
Categoría	(*iv*) Intereses y expectativas	(*iii*) Estrategias, técnicas y tareas
Indicador	Conoce el interés de los alumnos por aplicaciones digitales de conceptos geométricos	Conoce analogías –ampliación de letras en Word–

En esta tabla se presentan relaciones establecidas entre la categoría del CCAM (*iv*), intereses y expectativas de los alumnos, y la categoría del CEM (*iii*), estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.

Relaciones entre las categorías (*ii*) y (*iii*) del CCAM y la categoría (*iii*) del CEM

En otra ocasión se observó *evidencia* del conocimiento de Eva de las interacciones de los alumnos con el contenido matemático (CCAM), esto es, Eva sabe que los alumnos para comprobar si dos triángulos son semejantes suelen plantear razones entre las medidas mayores y las menores, y que pueden quedarse con una idea parcial del sentido del procedimiento para verificar la semejanza de triángulos [líneas 953-962].

Eva ¿Se podrá hacer [la proporción] al revés? [Los alumnos han calculado las razones entre el triángulo de mayores dimensiones (24, 21, 15) y el de menores (8,7,5)].
Al Sí.
Eva ¿Y pasará lo mismo?
Al No.
Eva ¿Cuánto dará si lo ponemos al revés? ¿8/24, cuánto da? 8/24 da un decimal. ¿Será lo mismo 7/21?
Al1 No.
Al2 ¿Por qué no?
Eva ¿5/15?
Al 0,33333333…
Eva Da 0,3 periódico. ¿Cuánto da acá? [Repite para 7/21, 8/24].
Al1 Lo mismo.
Al2 0,3333…
Eva Da en todos lo mismo. Dos triángulos van a ser semejantes cuando haya proporción. ¿Han escuchado ese término? Cuando la razón de dos cocientes son iguales se dice que hay proporción. Todas estas se llaman «razón». ¿Cuál de las dos maneras es la correcta? ¿La que dio 3 o la que dio 0,3?
Al La que dio 3.
Eva ¿Qué significaba proporcionales? Que al dividirlos daba la misma razón. Veamos el

973		caso de arriba ¿Daba la misma razón?
974	Al	Sí
975	Eva	¿Y abajo?
976	Al	Sí.
977	Eva	O sea, se pueden ocupar cualquiera de las dos.

Con el fin de solventar este hecho, Eva menciona que para comprobar que dos triángulos son semejantes, es posible dividir las medidas correspondientes de un triángulo entre las del otro y viceversa, destacando que lo importante es la igualdad entre las razones, independiente de su valor [líneas 958-977]. En esta acción identificamos el conocimiento de Eva de las estrategias de enseñanza (CEM), enfrentando a los alumnos en el planteamiento de razones de los lados homólogos y su cálculo inverso.

Además, en la entrevista a la pregunta *Al enseñar la semejanza de triángulos, ¿cuáles son los principales errores que presentan sus alumnos?*, Eva responde:

> Los principales errores [que cometen los alumnos son], que cambien el orden de las divisiones, por ejemplo, que en un lado partan tomando el 12 arriba y el 36 abajo en una fracción y que después, en el otro caso, ocupen el 24 arriba y el 8 abajo, que no respeten el orden en que están haciendo las divisiones.

La respuesta de Eva permite ver la integración de su conocimiento de las estrategias de enseñanza (CEM) con el conocimiento sobre los errores principales de los alumnos que consisten en el planteamiento de proporciones sin considerar elementos homólogos (CCAM).

Asimismo, se observa el conocimiento de Eva sobre las estrategias habituales de los alumnos en su interacción con el contenido de semejanza de triángulos (CCAM), en el siguiente extracto [1057-1063]:

1057	Eva	¿Al 100° cuál le correspondía?
1058	Al	4 cm y 8 cm.
1059	Eva	4 cm y 8 cm. ¿Podría haber escrito 8/4?
1060	Al	Sí.
1061	Eva	Y ¿4/8?
1062	Als	También.
1063	Eva	Para que no suene a costumbre, vamos a escribir 4/8.

Eva enfrenta la persistencia de los alumnos en plantear razones solo entre las medidas mayores y las menores mediante la explicitación de dicho planteamiento y la propuesta de razones con las medidas en sentido inverso (CEM). En este caso, la aparición de CCAM y la emergencia de CEM confirman la relación entre la categoría (*iii*) del CCAM y la categoría (*iii*) del CEM.

Tabla 3.
Relaciones entre las categorías (*ii*) y (*iii*) del CCAM y la categoría (*iii*) del CEM

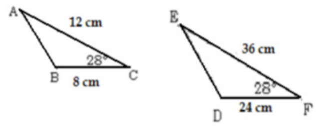
Subdominio	*CCAM*		*CEM*
Categoría	(*ii*) Fortalezas y dificultades	(*iii*) Formas de interacción	(*iii*) Estrategias, técnicas y tareas
Indicador	Conoce errores de los alumnos en el planteamiento de proporciones sin elementos homólogos	Conoce que los alumnos para comprobar si dos triángulos son semejantes suelen plantear razones solo entre las medidas mayores y las menores	Conoce estrategia de cuestionar planteamientos sobre las razones de los lados homólogos y su cálculo inverso para la comprobación de semejanza

Esta tabla recoge relaciones de las categorías del CCAM (*iii*) formas de interacción con el contenido matemático y (*ii*) fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, con la categoría del CEM (*iii*) estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.

Relaciones entre la categoría (*i*) del CCAM y las categorías (*i*) y (*iii*) del CEM

En el siguiente extracto [1115-1130], Eva propone realizar una tarea que consiste en establecer condiciones para que dos triángulos sean semejantes, dados dos lados y un ángulo comprendido entre ellos:

Eva Fíjense en esos dos triángulos [señala los triángulos proyectados en la pizarra]. ¿Tienen toda la información de sus medidas?



Als No.

Eva Nos faltan. ¿De qué se trata esa parte del problema? ¿Qué es desafiante acá? Usted ya sabe qué tiene que ocurrir para que sean semejantes. Por lo que usted debería ser capaz de asignar condiciones. ¿Qué datos les faltan y qué condiciones deben cumplir para que sí sean semejantes? A simple vista, ¿podríamos decir que son semejantes si no están todos los datos?

Al Sí.

Eva ¿Se puede? ¿Sí o no?

Al Sí.

Eva ¿Cuál es la primera condición?

Al El ángulo [las medidas].

Eva ¿Cuántos ángulos conocemos?

Al Uno.

Eva Uno solo. Y esos dos sí son iguales [ángulos ACB y EFD], pero no podemos afirmar que los otros dos [ángulos restantes] lo sean.

La tarea es desafiante para los alumnos (CEM), pues requiere que establezcan condiciones para determinar la semejanza de triángulos y las tareas previas no han tenido este nivel de dificultad. Mediante preguntas a los alumnos Eva les cuestiona y orienta en la búsqueda de condiciones, con lo cual se manifiesta una manera de enseñar (CEM) basada en un supuesto de cómo los alumnos aprenden las matemáticas (CCAM).

En la entrevista preguntamos a Eva sobre *estrategias que usa para enseñar la semejanza de triángulos*:

> Hay una actividad bien interesante, es de una tesis, que consiste en quitarle datos a los triángulos y preguntarles bajo qué condiciones son semejantes. Es una pregunta compleja para ellos y ha resultado exitosa casi todos los años porque ellos se cuestionan lo que ya sabían [comprobar la semejanza de triángulos con todas las medidas dadas].

En la respuesta de Eva se puede evidenciar su conocimiento acerca de que los alumnos aprenden a partir de tareas complejas que les invitan a cuestionar sus conocimientos (teoría personal de aprendizaje).

Por otra parte, a la pregunta *¿Te apoyas en alguna teoría de la DM para la enseñanza de las matemáticas?*, Eva responde:

> Me tomo mucho de la TSD, en términos de devoluciones sobre todo. Creo que uso y me baso un poco en la teoría de registros de Duval. Pero más que nada, tengo el sello de la Resolución de Problemas al estilo japonés, definitivamente, pero porque lo hemos trabajado mucho. [El enfoque de RP] tiene mucha relación con las fases de la TSD, con las devoluciones, con la forma en que preguntan, con los problemas que les dan en las clases.

En su respuesta se evidencia el conocimiento de algunas teorías formales de enseñanza, tales como la teoría de situaciones didácticas (TSD), teoría de registros (TR), enfoque de resolución de problemas (RP). Asimismo, Eva atribuye sus estrategias de enseñanza y la selección de tareas a su conocimiento de dichas teorías.

Tabla 4.
Relaciones entre la categoría (*i*) del CCAM y las categorías (*i*) y (*iii*) del CEM

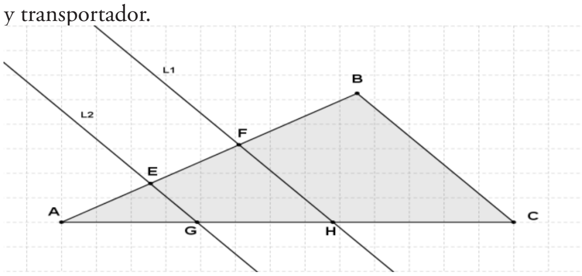
Subdominio	*CCAM*	*CEM*		
Categoría	(*i*) Teorías de aprendizaje	(*i*) Teoría de enseñanza	(*iii*) Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático	
Indicador	Conoce que los alumnos aprenden a partir de tareas complejas que cuestionen sus conocimientos (teoría personal)	Conoce teorías formales de enseñanza –enfoque de RP, TSD, TR–	Conoce tipos de tareas desafiantes para propiciar el aprendizaje de semejanza de triángulos	Conoce estrategias de enseñanza a través de preguntas orientadoras y de cuestionamiento

Esta tabla presenta las relaciones establecidas entre la categoría del CCAM (*i*) teorías de aprendizaje y las categorías del CEM (*i*) teorías de enseñanza y (*iii*) estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.

Relaciones entre la categoría (*ii*) del CCAM y las categorías (*ii*) y (*iii*) del CEM

En el siguiente extracto [1787-1864], Eva plantea una tarea que requiere medir ángulos y trazos entre rectas paralelas mediante el uso de regla y transportador:

1787 Eva Es una actividad más bien exploratoria. Voy a pasar a cada uno una guía, regla
1788 y transportador.



1813 Y entonces, responda: ¿cuáles son los ángulos del triángulo ABC?
1814 ¿Cómo va a poder responderlo? ¿Qué se usa para medir los ángulos?
1815 Als Transportador. [Los alumnos trabajan en grupos].
…

Eva ¿Cuáles son los tres ángulos del triángulo pequeño? 32°, 98°, 52°. ¿Cuáles son los ángulos del triángulo más grande? 32°, 98°, 50°. Por lo tanto, ¿qué medidas le corresponde al ángulo de 32°? Y usted tenía que medir con la regla. El triángulo grande, frente al de 32°, está ese segmento, ¿sí? ¿Cuánto mide ese segmento? ¿Lo midieron?
Al 6,5
Eva ¿6,5? Pero aproximado, porque estamos estimando.

Este extracto da *indicio* del conocimiento de Eva de tareas que propician aprendizaje de las matemáticas, correspondiente a la categoría (*iii*) del CEM. La intención de Eva es que los alumnos puedan explorar, a partir del uso de regla y transportador, la semejanza de triángulos, la proporcionalidad de segmentos y las condiciones del teorema de Thales sin su formalización, aplicando sus conocimientos previos.

En la entrevista, a la pregunta *¿Qué aprendizaje esperaba a partir de esta tarea* y *cuál fue el objetivo?*, Eva responde:

> [La tarea] sirve como ejercicio de aplicación porque ellos miden, ven que aproximadamente hay una proporción, que los ángulos son los mismos, entonces son semejantes. Además, intencionalmente, hay trazos que no son los lados de los triángulos, por ejemplo, el EF y el GH, entonces ahí escapamos de lo que sabían. Porque no solo son proporcionales los trazos que forman los triángulos, sino que son proporcionales aquellos que están entre medio de las paralelas con otro que también está al frente y que no son parte de ningún triángulo.
>
> La idea era que se dieran cuenta de que cuando hay paralelas, esos trazos son proporcionales. Ellos ya sabían el teorema de las paralelas, solo que acá lo aplican. Por eso usan el transportador. Al ver que esos ángulos miden lo mismo, concluyen que son paralelas. Después, miden los trazos y hacen ciertas divisiones que están intencionadas para que vean que, aproximadamente, hay proporción.

Este fragmento evidencia el CEM de Eva dada la intencionalidad de la tarea planteada (*iii*).

Asimismo, el extracto de la clase y los fragmentos de la entrevista evidencian el conocimiento de Eva de los recursos materiales usados, regla y transportador, y del rol atribuido a estos instrumentos a la hora de resolver la tarea planteada, la categoría (*ii*) del CEM.

A la pregunta de la entrevista *¿Qué explicación les da a los alumnos cuando usan aproximaciones para plantear la proporción?*, Eva respondió:

> Son medidas aproximadas porque no contamos con herramientas manuales precisas. Hay programas que lo hacen, pero solo aproximamos dado el margen de error que siempre hay en la utilización de instrumentos. Por eso hablo de manera aproximada y ellos ocupan las medidas que tienen y comparan entre sí si son cercanas o no.

Asimismo, Eva aborda la pregunta *¿Cuál es el rol que asignas a estos instrumentos para la enseñanza del teorema de Thales?* de la siguiente manera:

> Una intención es que fuera más exploratoria aún, que no fuera una cosa que yo les doy y miremos este triángulo y yo les diga que estos ángulos son los mismos, etc. Entonces tiene también el grado de dificultad que no pasa solo en el ejercicio que yo doy, sino que pasa realmente cuando yo mido. Tiene un sentido de acercamiento con la realidad.

En sus respuestas se evidencia el conocimiento de las potencialidades (la posibilidad de verificar las hipótesis del teorema de Thales) y limitaciones (obtención de medidas inexactas) de estos recursos para la enseñanza de la semejanza y del teorema de Thales.

Por otro lado, en la entrevista Eva muestra conocer las siguientes dificultades de los alumnos a la hora de realizar mediciones:

> Por ejemplo, toman la regla y miden desde el 1 o miden desde el borde, donde todavía no empieza el 0 o el transportador, no tienen idea de cómo usarlo. ¿Qué es?, ¿para qué sirve?, ¿cómo se usa? El centro, ¿qué es?, ¿dónde se coloca? Tiene dos corridas de números el trasportador y se equivocan porque toman los que no corresponden.

Su respuesta da *evidencia* de que Eva conoce que el uso de estos instrumentos de medición presenta dificultades en sus alumnos para plantear proporciones (CCAM).

Tabla 5.
Relaciones entre la categoría (*ii*) del CCAM y las categorías (*ii*) y (*iii*) del CEM

Subdominio	*CCAM*	*CEM*	
Categoría	(*ii*) Fortalezas y dificultades	(*ii*) Recursos didácticos	(*iii*) Estrategias, técnicas y tareas
Indicador	Conoce las dificultades de los alumnos para hacer mediciones con el uso de regla y transportador	Conoce recursos materiales –regla y transportador–	Conoce tipos de tareas para propiciar el aprendizaje del teorema de Thales y desarrollar habilidades de medición

Así, se establecen relaciones de la categoría del CCAM (*ii*) fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático con las categorías del CEM (*ii*) recursos didácticos y (*iii*) estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático (tabla 5).

De este modo, en este estudio, en el desempeño de Eva se han evidenciado diversas relaciones entre los dos subdominios que se discuten a continuación.

DISCUSIÓN

Los resultados de la investigación muestran varias relaciones entre los subdominios del CCAM y del CEM. La figura 2 resume las relaciones descritas entre las categorías del CCAM y las categorías del CEM a partir de sus indicadores.

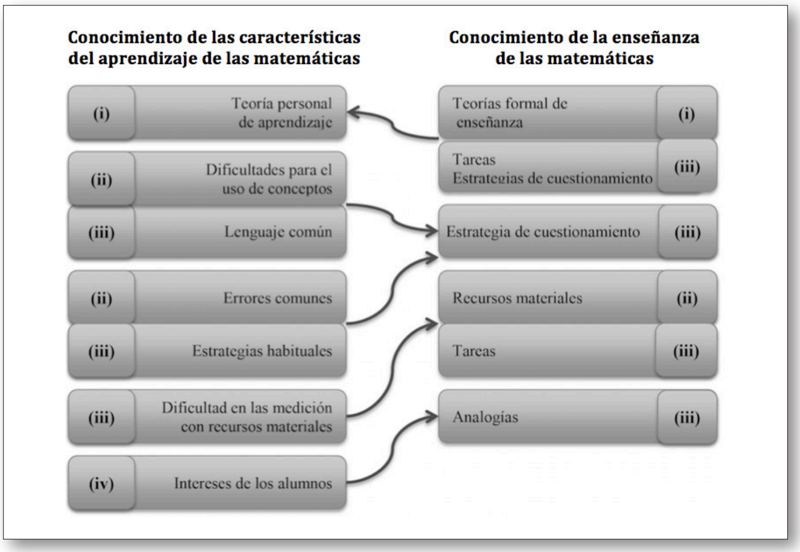


Fig. 2. Relaciones entre las categorías del CCAM y las del CEM. Elaboración propia

Como indica la primera relación de la figura, el conocimiento de Eva de teorías formales de enseñanza ha influido en sus decisiones a la hora de usar estrategias de enseñanza y plantear tareas, potenciando su teoría personal de aprendizaje de las matemáticas. Así, el conocimiento del enfoque de RP ha permeado su enseñanza, pues, a partir de tareas complejas y el cuestionamiento, Eva, en el intento de que los alumnos aprendan, proporciona elementos a su teoría personal de aprendizaje.

Si bien es esperable que la enseñanza se construya a partir de las teorías (formal o personal) de aprendizaje, en este caso se vio que la teoría formal de enseñanza potenció la teoría personal de aprendizaje de Eva. En efecto, prevalecieron las teorías formales de enseñanza y emergieron esbozos de nociones de aprendizaje. Ello podría atribuirse a su formación de posgrado en Didáctica de la Matemática, que proporciona conocimientos acerca de distintos marcos teóricos que en su mayoría pueden ser considerados como teorías de enseñanza de las matemáticas.

Además, sus experiencias en un grupo de estudio de clase basado en el enfoque de RP (Isoda y Olfos, 2009) han influido en su manera de incorporar las estrategias de enseñanza de las matemáticas en sus clases. Es interesante observar que, aunque en sus estudios de posgrado se aborda la teoría APOE, Eva no la mencionó, y tampoco se observó en sus clases que aplicara esta u otra de las teorías de aprendizaje de las matemáticas. Este hecho parece indicar cierta lejanía de las teorías formales con las prácticas de los profesores, mientras que la participación de profesores en equipos de investigación puede constituir un puente entre teoría y práctica (Godino, 2010), lo que concuerda con el hecho de que Eva destaque empatizar con el enfoque de RP que trabaja en su grupo de estudio de clases.

Los resultados del estudio muestran que Eva ha utilizado frecuentemente en su enseñanza la estrategia de cuestionamiento, vinculado con su conocimiento de características del aprendizaje de las matemáticas. Así, el conocimiento de Eva sobre el lenguaje común y las dificultades de sus alumnos le ha llevado a usar la estrategia de cuestionamiento para enfrentar a los alumnos con los propios planteamientos y solventar sus dificultades. Mientras, el conocimiento de Eva acerca de las estrategias habituales de los alumnos y sus errores le ha permitido usar esta misma estrategia de enseñanza para flexibilizar las formas de pensar de los alumnos.

Asimismo, el conocimiento acerca de las dificultades de los alumnos en las mediciones con recursos materiales lleva a Eva a plantear tareas donde la medición de ángulos y segmentos tiene un papel importante para los aprendizajes esperados.

Y en la última relación, el uso de la analogía como estrategia de enseñanza se relaciona con su conocimiento de los intereses de sus alumnos. Eva presenta una analogía de ampliación de letras en Word para enfatizar el uso del concepto de semejanza en aplicaciones digitales en la vida cotidiana.

Como se observa, los subdominios CCAM y CEM se potencian mutuamente, aunque de las relaciones establecidas en este estudio el CCAM potencia más al CEM. Respecto a las interrogantes que nos llevaban a ahondar en la comprensión de la compleja red de relaciones dentro del conocimiento del profesor, las evidencias empíricas dan cuenta de que las decisiones del profesor están condicionadas por su conocimiento de las características de aprendizaje. Así, el uso de alguna estrategia (e.g. cuestionamiento o analogía) para la enseñanza del tema ha estado condicionado por su conocimiento de las características de aprendizaje de ese tema (e.g. dificultades, lenguaje común o intereses de los alumnos). Asimismo, al proponer una tarea para abordar cierto concepto matemático, ha estado involucrado su conocimiento de las dificultades de aprendizaje del concepto.

Por otra parte, el estudio aporta nuevas evidencias de relaciones entre algunos de los aspectos que Baumert *et al.* (2010) destacan sobre la instrucción matemática efectiva, en concreto la evidencia de la relación entre el conocimiento de las tareas matemáticas para el aprendizaje y el conocimiento de las concepciones de los estudiantes. Análogamente, las relaciones encontradas permiten vincular las diferentes facetas del conocimiento didáctico-matemático de Godino *et al.* (2007); o profundizar en la articulación del conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan y aprenden, con el diseño y la gestión de entornos de aprendizaje (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

Como se ha podido apreciar, el conocimiento del profesor determina algunos aspectos de su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo estudiar las regularidades y la naturaleza de las interacciones que se generan durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, y cómo dichas interacciones permiten dar cuenta del papel del profesor en la constitución de unas determinadas prácticas matemáticas en el aula (Llinares, 1999). La riqueza de las evidencias empíricas emergidas permite profundizar en las relaciones específicas del conocimiento del profesor.

El modelo MTSK ha sido una herramienta analítica para estudiar el conocimiento del profesor, el cual no solo se manifiesta en situaciones complejas, sino que, en sí mismo, es complejo, integrado por múltiples dimensiones. Indagar en las relaciones entre los subdominios del MTSK contribuye a visualizar tal complejidad.

En concreto, el estudio aporta especificidad en las relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y de las características del aprendizaje de las matemáticas, las cuales se potencian y se condicionan mutuamente; da cuenta de las relaciones que guardan estos conocimientos en la acción del profesor, vinculando la investigación de una forma directa con la práctica del profesor (Sosa *et al.*, 2015). Además, al establecer las relaciones mencionadas se aporta con un banco de ejemplos (episodios) potencialmente útiles en contextos de formación inicial y continua del profesorado. Nuevas investigaciones podrían indagar en cómo estas relaciones se forman tanto en los futuros profesores como en los profesores en servicio.

La reflexión sobre el conocimiento implicado en sesiones reales, particularizando en dichas relaciones, es un buen punto de partida para (re)construir el conocimiento profesional por parte del profesorado. Se trata de una reflexión sobre una base no exclusivamente teórica, sino vinculada a la práctica, donde profesores y alumnos ponen en juego, entre otras cosas, sus conocimientos y motivaciones, haciéndose patente la complejidad y el dinamismo del conocimiento.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación está financiada por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile, CONICYT, mediante los proyectos Fondecyt N 11140092 y Fondecyt N 11140472.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. y Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), pp. 133-180. https://doi.org/10.3102%2F0002831209345157

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los Espacios de Trabajo Matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.). *Proceedings Fourth ETM Symposium* (pp. 473-485). Madrid, España.

García, M. y Dueñas, A. (2014). Fortalecer el álgebra a través de los procesos aritméticos en la educación secundaria. *Perfiles Educativos*, 36(143), pp. 16-20. Disponible en línea: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982014000100017&lng=es&tlng=en>.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Universidad de Granada. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/local/jgodino>.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), pp. 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, pp. 372-400. Disponible en línea: <http://www.jstor.org/stable/40539304>.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontifica Universidad Católica de Valparaíso.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. Ponte (Coord.). *Desenvolvimiento profesional dos profesores de Matemática. ¿Qué formaçao?* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Ciencias de Educação.

Llinares, S. (1999). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Serrazina (Orgs.). *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*–Atas da Escola de verão (pp. 109-132). Lisboa: SEM/SPCE.

Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), pp. 87-109. Disponible en línea: <http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/2662/1274>.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.). *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.
https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sosa, L., Aguayo, L. M. y Huitrado, J. L. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. S. García, J. A. Hernández, y L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Díaz de Santos.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), pp. 173-189. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. Ámsterdam: IEA.

Varas, L., Lacourly, N., López, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), pp. 171-187.
https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n1.857

Zakaryan, D. y Ribeiro, C. M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), pp. 301-321.
http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Connections between knowledge of mathematics teaching and knowledge of features of learning mathematics: the case of a high-school teacher

Diana Zakaryan, Soledad Estrella, Gonzalo Espinoza-Vásquez, Sergio Morales, Raimundo Olfos
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
diana.zakaryan@pucv.cl, soledad.estrella@pucv.cl, gonzalo.espinoza.v@gmail.com, sergio.morales.candia@gmail.com, raimundo.olfos@pucv.cl

Eric Flores-Medrano
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México
eflores@fcfm.buap.mx

José Carrillo
Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@uhu.es

Teacher knowledge is a relevant factor in teacher's professional achievement and in promoting mathematical learning in their students as well. The discussion about what this knowledge consists of has contributed to the development of different conceptualizations of teacher knowledge, for example, Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), elaborated by Ball and colleagues; Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK), developed by Carrillo and colleagues; and Knowledge Quartet (KQ), created by Rowland and collaborators. These conceptualizations principally agree in considering in their proposals content knowledge and pedagogical content knowledge to be taught. This study recognizes the complexity of the processes of teaching and learning, as well as the importance of the teacher having knowledge both of teaching and of learning mathematics, and argues for the need for studying the relationship between the two. Based on the MTSK model, we seek to establish relationships between a high-school teacher's knowledge of mathematics teaching (KMT) and her knowledge of the features of learning mathematics (KFLM) on the topic of the similarity of triangles.

Through an interpretative approach, considering teacher knowledge as a complex and situated object of study, we investigate the knowledge of a tenth-grade (students 14 to 15 years old) mathematics teacher in a Chilean public school. The choice of the case is due to the teacher's academic characteristics (she graduated top in her class in pedagogy of mathematics, has a master's degree in didactics of mathematics, and forms part of a lesson study group), which makes us think that she has a notable knowledge of the elements of the subdomains that are the object of study. Data collection was done through the non-participant observation method and a semi-structured interview. Based on content analysis, units of analysis associated with the subdomains in question have been identified, taking into consideration the difference between evidence and signs of knowledge. The units of analysis identified as signs of knowledge were incorporated into the interview and confirmed as evidence of knowledge.

The results of this study allow for connecting research and teachers' practices, in that they account for specific relationships among subdomains and their categories, and how these promote decisions in the classroom. The KFLM and KMT subdomains mutually reinforce one another, although based on the relationships established in this study, KFLM strengthens KMT more than vice-versa. Empirical evidence shows that the teacher's decisions are conditioned by her knowledge of the characteristics of learning. Thus, the use of a certain strategy (e.g. questioning or an analogy) for teaching the topic has been conditioned by her knowledge of the characteristics of learning that topic (e.g. students' difficulties, common language, or interests). In this way, in proposing a task for addressing a certain mathematical concept, her knowledge of the difficulties of learning the concept has been involved. Additionally, establishing the aforementioned relationships contributes to a collection of examples (episodes) that are potentially useful in contexts of initial and continuing teacher education. Reflection on knowledge implied in real classes, focusing on these relationships, is a good starting point for (re)building teachers' professional knowledge.