ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.3 (2017): 51-67
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2302
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática

Understanding of the equal sign at the entrance to algebra: task design and conversation in math class

Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet
Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com

Javier Lezama
CICATA. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
jlezamaipn@gmail.com

RESUMEN • Presentamos un estudio que indaga sobre los significados que le atribuyen al signo de igual, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes de enseñanza secundaria (13-14 años) en un liceo de Uruguay. Focalizamos en dos sesiones de trabajo que desarrollamos con todo el grupo. Los resultados ponen de manifiesto que las tareas enfocadas a similitudes y diferencias, entre ellas las de clasificar y las que requieren comparar y contrastar, mediadas por una práctica de indagación, generaron genuinas discusiones que despertaron el interés de los estudiantes, lo que a su vez permitió abordar aspectos conceptuales relacionados con el signo de igual que contribuyeron a su comprensión.

PALABRAS CLAVE: signo de igual; diseño de tareas; conversación; pensamiento relacional; enseñanza secundaria.

ABSTRACT • We present a study about the meanings attributed to the equal sign, in an algebraic context, by a group of students of secondary school (13-14 years) in Uruguay. We focus on two work sessions we developed with the whole group. The results show that tasks focused on similarities and differences, including those of classifying and those that need to compare and contrast, mediated by a practice of inquiry, generated genuine discussions that aroused the interest of students, which in turn allowed them to approach to conceptual aspects related to the equal sign that contributed to their understanding.

KEYWORDS: equal sign; task design; conversation; relational thinking; secondary school.

Recepción: febrero 2017 • Aceptación: junio 2017 • Publicación: noviembre 2017

INTRODUCCIÓN

Como docentes de enseñanza secundaria, hemos identificado algunas dificultades que afrontan los estudiantes de segundo año (13-14 años) al iniciarse en el trabajo algebraico. Por ejemplo, cuando enseñamos a sumar polinomios, tras obtener el polinomio suma, es habitual que los alumnos nos pregunten «¿Y cuánto da?», pues no conciben que un polinomio con más de un término sea el resultado de una operación. Asimismo, cuando nos adentramos en la resolución de ecuaciones, como por ejemplo $20 = 4x + 12$, es frecuente que para resolverla ellos tiendan a reescribirla como $4x + 12 = 20$, sin reconocer además que ambas son equivalentes. Estos ejemplos podrían vincularse con la tendencia de los estudiantes a interpretar el signo de igual como el indicador del resultado de una operación, en lugar de interpretarlo como el indicador de una relación de equivalencia. Estas visiones corresponden a lo que Behr, Erlwanger y Nichols (1976) denominan comprensión operacional o comprensión relacional del signo de igual, respectivamente.

Varios estudios reportan ciertas dificultades de los estudiantes en el álgebra relacionadas con la comprensión del signo de igual (Kieran, 1981; Rojano y Gallardo, 1988; Sfard y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1996; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2011; Burgell y Ochoviet, 2015). En la mayoría de estos trabajos se aborda la problemática en un contexto aritmético e incipientemente en un contexto algebraico de ecuaciones. En este trabajo indagamos qué significados atribuyen al signo de igual, en un contexto algebraico de ecuaciones y polinomios, un grupo de estudiantes de 13-14 años que ya habían estudiado estos tópicos. Reportamos los resultados de esta investigación tanto por el interés que comportan dichos hallazgos para la práctica de los docentes, como para estrechar lazos entre las prácticas de enseñanza y la investigación en Didáctica de la Matemática.

ANTECEDENTES TEMÁTICOS RELATIVOS A LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES CON EL SIGNO DE IGUAL EN UN CONTEXTO ALGEBRAICO

Kieran (1981) sostiene que una interpretación operacional del signo igual permite a estudiantes de enseñanza secundaria atribuirles sentido a ecuaciones como $3x + 5 = 26$, pero no así a ecuaciones como $3x + 5 = 2x + 12$.

Rojano y Gallardo (1988) y Sfard y Linchevski (1994) encuentran que, en el contexto de una ecuación, los estudiantes reconocen como necesario obtener el mismo valor a cada lado del signo de igual, pero admitiendo que la variable pueda tomar más de un valor cada vez en una misma expresión, es decir, un valor distinto a cada lado del signo de igual.

Herscovics y Linchevski (1994) y Sfard y Linchevski (1994) reportan dificultades de estudiantes de enseñanza secundaria para resolver ecuaciones donde la variable aparece solamente en el segundo miembro, asociándolas a una comprensión operacional del signo de igual.

Knuth *et al.* (2011) destacan que una interpretación relacional del signo de igual, en estudiantes de enseñanza secundaria, favorece el desempeño con ecuaciones y tareas relativas a ecuaciones equivalentes.

Burgell y Ochoviet (2015) muestran que los alumnos de primer año de enseñanza secundaria que participan de su estudio interpretan el signo de igual como el indicador del resultado de una operación y no como el indicador de una relación de equivalencia, interpretación que resulta imprescindible para el abordaje del álgebra. También señalan que los docentes no le brindan al tema una atención especial.

MARCO CONCEPTUAL

El presente trabajo se inscribe en la noción de *pensamiento relacional* según se propone en Molina (2006). El desarrollo de este tipo de pensamiento, de carácter algebraico, es fundamental para el trabajo en álgebra dado que tiene lugar, particularmente, en la transformación de expresiones y en la resolución de ecuaciones, que es el contexto en el que nos ubicamos.

> La actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas (algebraicas), considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (Molina, 2006: 65).

En este marco, adoptamos como perspectiva la clasificación de los significados y usos del signo de igual en el contexto escolar de Molina (2006) y Molina *et al.* (2009). Esta clasificación fue elaborada teniendo en cuenta los significados del signo de igual que son reconocidos y utilizados por la comunidad matemática, y también aquellos que son otorgados por los alumnos o utilizados en los libros de texto de la matemática escolar. A continuación, describimos brevemente cada uno de ellos:

1. *Propuesta de actividad*. Se refiere al uso del signo en expresiones incompletas que incluyen solamente a la izquierda del signo de igual una cadena de números y/o símbolos vinculados por símbolos operacionales.
   Ejemplo: $x(x + 1) - 3x(x + 5) =$.
2. *Operador*. Se refiere al uso unidireccional del signo de igual en igualdades que incluyen una cadena de operaciones a la izquierda del signo de igual, y su resultado a la derecha.
   Ejemplo: $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$.
3. *Expresión de una acción*. Este significado está presente cuando el signo de igual separa una cadena de operaciones y su resultado, pero aceptando que ambos se dispongan indistintamente a la izquierda o a la derecha del signo de igual.
   Ejemplo: $2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$; $x(x - 2) - x^2 + 4x = 2x$.
   En nuestro estudio nos referiremos a este uso únicamente cuando el resultado esté a la izquierda del signo de igual. De lo contrario, nos remitiremos al significado de operador.
4. *Separador*. Se refiere al uso del signo dado por los estudiantes, en un contexto algebraico, para separar los pasos realizados en la resolución de una actividad.
   Ejemplo: $x^2 + 1 = x = x^2 - x + 1 = 0$.
5. *Expresión de una equivalencia condicional*. Se refiere al caso en el que la equivalencia expresada por el signo de igual solo es cierta para algún o algunos valores de la variable o las variables. Este significado impone que la ecuación correspondiente tenga un conjunto finito de soluciones, pudiendo ser el conjunto vacío.
   Ejemplo: $x^2 + 4x = 5x - 6$.
6. *Expresión de una equivalencia*. Se refiere al uso del signo de igual para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Este significado se divide en cuatro acepciones que detallamos a continuación:
   - 6.a *Equivalencia numérica*. Relaciona dos expresiones aritméticas que arrojan el mismo valor numérico.
     Ejemplo: $4 + 5 = 3 + 6$.
   - 6.b *Equivalencia simbólica*. Relaciona dos expresiones algebraicas que tienen el mismo valor numérico para todos los valores de la variable o las variables.
     Ejemplo: $x^2 + 2x = x(x - 2)$.

6.c *Identidad estricta*. Cuando las expresiones a ambos lados del signo de igual representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.
Ejemplo: $x + 5 = x + 5$.

6.d *Equivalencia por definición o por notación*. Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.
Ejemplo: 100 *cm* = 1 *m*.

7. *Definición de un objeto matemático*. Cuando el signo de igual se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.
   Ejemplo: $f(x) = 2x + 3$.
8. *Expresión de una relación funcional o de dependencia*. Se refiere al uso del signo de igual para indicar una relación de dependencia entre variables o parámetros.
   Ejemplo: $l = 2\pi r$.
9. *Indicador de cierta conexión o correspondencia*. Hace referencia al uso del signo de igual entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.
   Ejemplo:☏☏☏ = 3.
10. *Aproximación*. Corresponde al uso del signo de igual para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.
    Ejemplo: 1/3 = 0,33.
11. *Asignación de un valor numérico*. Cuando el signo de igual asigna un valor numérico a un símbolo.
    Ejemplo: si $x = 4$, ¿cuál es el valor numérico de $x – 5$?

Molina *et al.* (2006) señalan que el significado de expresión de una equivalencia es el único que hace referencia a una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, y que en los demás casos, la relación no es reflexiva, y a veces, tampoco transitiva. También destacan que en al menos seis de los significados presentados se utiliza el signo de igual en sentido unidireccional. El significado de expresión de una equivalencia condicional, por su naturaleza bidireccional, por ejemplo, podrá dar cuenta de una interpretación relacional del signo de igual aunque no haga referencia a una relación de equivalencia.

Si bien Molina *et al.* (2006) utilizan indistintamente los términos uso y significado, en Parodi (2016) se propone una interpretación de estos términos, que es la que utilizamos en este trabajo. Por ejemplo, cuando un alumno escribe una expresión matemática en la que utiliza el signo de igual, pone en evidencia uno o más significados del signo de igual. Un estudiante que afirma que en una ecuación el signo de igual significa que debe hallar el valor de la incógnita para el cual los dos miembros toman igual valor numérico, puede no ser capaz de utilizar este signo para escribir una ecuación que tenga una solución dada o para escribir el procedimiento de resolución de una ecuación. Con esto queremos mostrar que no todo significado se traduce en un uso. En otras palabras, entendemos por significado una elaboración cognitiva, un concepto o una idea en relación con un objeto matemático, mientras que entendemos por uso la materialización de un significado a través de la producción escrita de una expresión matemática. Esta distinción resultó funcional como herramienta analítica para distinguir entre estos dos constructos.

PARTICIPANTES, DISEÑO DE LAS TAREAS Y GESTIÓN DE LA CLASE

Trabajamos con un grupo de 31 estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria (13-14 años) que ya habían estudiado las ecuaciones, los polinomios y las funciones. El grupo estaba a cargo de uno de los investigadores y correspondía a una institución educativa privada de Montevideo, Uruguay. Los estudiantes se desenvolvían en un ambiente favorable al estudio, eran apoyados desde la institución y tenían un muy buen nivel socioeconómico.

Desarrollamos dos sesiones de trabajo con todo el grupo de estudiantes. Cada sesión tuvo una duración de 80 minutos. Para estas sesiones diseñamos dos tareas enfocadas en la búsqueda de similitudes y diferencias (Zaslavsky, 2008): una tarea de clasificación y una tarea que requiere comparar y contrastar. Elegimos este tipo de tareas porque, según la autora, tienen potencial para generar intensos debates entre los estudiantes y esto permite identificar maneras de pensar y grados en que los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos. La metodología empleada estuvo caracterizada por una práctica de indagación (Szydlik, 2015), que consiste en escuchar, confrontar y cuestionar los planteamientos de los estudiantes, sin emitir juicios acerca de lo correcto o incorrecto. Nos referimos a la jerarquización de la conversación en la clase de matemática, buscando el conflicto y el intercambio de ideas entre los alumnos, exclusivamente.

Diseño de la tarea de clasificación

Para la primera sesión nos inspiramos en las tareas de clasificación (Zaslavsky, 2008). Estas tareas consisten en proporcionar entre 20 y 30 tarjetas para que los estudiantes, reunidos en pequeños equipos, las clasifiquen de acuerdo con todos los criterios que crean convenientes. Cada equipo debe registrar por escrito los criterios de clasificación y las diferentes categorías establecidas en cada caso, respetando el orden en que fueron surgiendo. La puesta en común, según Zaslavsky, es un momento propicio para abordar otros criterios de clasificación y para considerar aspectos conceptuales de los objetos matemáticos involucrados. Este tipo de tareas, agrega, no consisten en llegar a una única solución.

Diseñamos un juego de 25 tarjetas. Cada tarjeta contiene una expresión en la que interviene el signo de igual. Buscamos abarcar la mayor cantidad de significados posibles del signo de igual de acuerdo con el marco conceptual adoptado.

Cuadro 1.
Tarjetas para clasificar

A. $11+6=17$	B. $8=8$	C. $31=4x+7$	D. $16=7+9$	E. $3x+5=26$
F. $2x+15-9=31-9$	G. $3x^2+4x^2=2x^2+5x^2$	H. $5+9=2+3+9$	I. $2x+1=17$	J. $2x+12=x+x+5+7$
K. $17=2x+1$	L. $4x^2+x+x+5x^2=9x^2+2x$	M. $18=2x+4$	N. $7x+2x=9x$	O. $x+3=3x+5$
P. $x + 18+11=27+11$	Q. $5(x+x+5+7)=5(2x+12)$	R. $1+4+x=2+3+x$	S. $1+4=2+3$	T. $4x=x+3x$
U. $5(2x+12)=5(x+18)$	V. $5+x=5+x$	W. $3x+5=2x+x+5$	Y. $2x+15=31$	Z. $x=x$

Incluimos cinco expresiones en un contexto aritmético y veinte en un contexto algebraico sobre ecuaciones y operaciones con polinomios. El diseño de las tarjetas posibilita una visión estructural de las expresiones en tanto que permite que los estudiantes observen tanto características *superficiales* como *ocultas* (Liebenberg, Linchevski, Olivier y Sasman, 1998). Por ejemplo, los estudiantes podrían apreciar una característica superficial, como que a izquierda y derecha del signo de igual tenemos «la misma cantidad de equis» (como en la tarjeta W), y también podrían observar una característica oculta como que $3x$ es igual a $2x + x$ porque se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación frente a la adición. Esto permite, asimismo, poner el foco en el desarrollo de un *pensamiento relacional* (Molina, 2006; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007) pues tanto las expresiones seleccionadas como el tipo de actividad que se solicita (clasificar) demandan que los estudiantes establezcan relaciones entre y dentro de estas expresiones, por ejemplo, al incluir en un mismo subgrupo dos expresiones de una equivalencia simbólica, como podrían ser las de las tarjetas G y R.

Los significados del signo de igual que están involucrados en este diseño son: operador, expresión de una acción, expresión de una equivalencia condicional, expresión de una equivalencia numérica, expresión de una equivalencia simbólica e identidad estricta. Asociamos cada expresión con una letra del alfabeto pero evitando el uso de la letra *x*, por ser esta la que se utiliza para representar la variable de las expresiones de contexto algebraico. El siguiente cuadro resume el significado del signo de igual y el contexto en el que se ubica cada expresión:

Cuadro 2.
Significado del signo de igual y contexto
en el que se presenta cada expresión para la tarea de clasificación

Significado signo de igual	*Contexto*		
	Contexto aritmético	*Contexto ecuaciones*	*Contexto polinomios*
Operador	A	(No corresponde)	L, N
Expresión de una acción	D	(No corresponde)	J, T, W
Expresión de una equivalencia condicional	(No corresponde)	C, E, F, I, K, M, O, P, U, Y	(No corresponde)
Expresión de una equivalencia numérica	H, S	(No corresponde)	(No corresponde)
Expresión de una equivalencia simbólica	(No corresponde)	(No corresponde)	R, G, Q
Identidad estricta	B	(No corresponde)	V, Z

En un contexto aritmético, el signo de igual interviene como expresión de una equivalencia numérica en dos casos, pero en uno de ellos aparece un mismo número sumado a cada lado del signo de igual para explorar si los estudiantes establecen cierta conexión entre esa expresión y algunas de las que se presentan en un contexto algebraico. En el marco de las ecuaciones, el signo de igual interviene siempre como expresión de una equivalencia condicional, lo que no impide abarcar una variedad de situaciones: en algunos casos aparece la variable solo en el lado izquierdo o solo en el lado derecho, mientras que en otros casos aparece en ambos lados; en un caso se suma un mismo número a cada lado del signo de igual, mientras que en otros casos se resta o se multiplica un mismo número a cada lado. En el marco de las operaciones con polinomios, definimos el signo de igual como expresión de una equivalencia simbólica solo cuando a ambos lados del signo aparecen expresiones por simplificar, mientras que, si aparece un polinomio reducido en el lado derecho o el lado izquierdo interpretamos el signo de igual como operador o como expresión de una acción, respectivamente. La consigna de la tarea es la siguiente:

(A) Han recibido 25 tarjetas con una expresión en cada una de ellas.
Les pedimos que clasifiquen estas expresiones, de todas las maneras que crean posibles.
En cada clasificación:
– Explicitar el criterio empleado.
– Especificar los subgrupos que se forman de acuerdo con ese criterio.
– Indicar qué tarjetas están en cada subgrupo.

(B) De acuerdo con el uso que tiene el signo de igual en cada expresión, ¿cómo clasificarían las tarjetas? ¿Por qué?

La parte (A) de la tarea propone que los estudiantes clasifiquen, de acuerdo con los criterios que estimen convenientes, las expresiones que aparecen en las tarjetas proporcionadas. Solicitamos a los alumnos que indiquen las expresiones que incluyen en cada categoría de acuerdo con el criterio considerado, para explorar si hacen algún tipo de mención a los significados del signo de igual involucrados en cada uno de ellos. La parte (B) de la tarea propone discutir explícitamente, y de forma colectiva, la relación que existe entre las expresiones presentadas y los diferentes significados del signo de igual. Esta parte de la tarea adquiere especial utilidad si al término de la puesta en común de la parte anterior, ningún equipo ha considerado los significados del signo de igual como criterio de clasificación, o en caso que lo haya considerado pero de forma confusa o poco explícita.

Diseño de la tarea de comparar y contrastar

Para la segunda sesión nos inspiramos en las tareas que requieren comparar y contrastar (Zaslavsky, 2008). Estas tareas consisten en presentar dos o más objetos matemáticos, y en pedirles a los estudiantes que realicen un listado con las diferencias y similitudes que logren identificar. Zaslavsky sostiene que el diseño de este tipo de tareas requiere objetos que tengan algunas características en común pero que al mismo tiempo difieran en relación con otros aspectos. Una tarea de comparación anima a los estudiantes a examinar los objetos presentados de forma abierta, agrega, y mientras buscan similitudes y diferencias se ven en la necesidad de realizar cálculos como medio para explorar objetos matemáticos.

Les presentamos a los estudiantes dos expresiones en un contexto algebraico donde interviene el signo de igual: una ecuación y una operación con polinomios. De acuerdo al marco conceptual desarrollado anteriormente, no estamos considerando una operación con polinomios y su resultado como una ecuación de infinitas soluciones, sino como una expresión que relaciona dos representaciones diferentes de un mismo polinomio. Eso hace que, vistas en conjunto, las dos expresiones seleccionadas sean consideradas como dos objetos matemáticos distintos, y no como dos ejemplos distintos de un mismo objeto matemático.

Las expresiones son (A) $2x + 3x + 7 = 5x + 7$ y (B) $5x + 7 = 6x + 4$. En la expresión A el signo de igual interviene como expresión de una equivalencia simbólica (o bien como un operador), mientras que en la expresión B el signo de igual interviene como expresión de una equivalencia condicional. Queremos indagar si los estudiantes identifican que esta diferencia está relacionada con los significados del signo de igual involucrados en las expresiones planteadas. Asimismo, en ambas expresiones interviene un mismo polinomio a un lado del signo de igual, $5x + 7$, y la variable aparece a ambos lados del signo de igual, para explorar si los estudiantes interpretan estas características como similitudes. La consigna de la tarea es la siguiente:

(A) ¿Qué diferencias y qué similitudes encuentran entre las siguientes expresiones?
   A. 2x + 3x + 7 = 5x + 7
   B. 5x + 7 = 6x + 4

(B) Si digo: «Uso que se le da al signo de igual en la expresión» ¿sería una similitud o una diferencia? ¿Dónde ubicarían este enunciado? ¿Por qué?

La parte (A) de la actividad se plantea para que los estudiantes comparen las dos expresiones presentadas e identifiquen todas las similitudes y diferencias que les sean posibles. Les pedimos que muestren los planteamientos realizados, teniendo en cuenta lo que sostiene Zaslavsky (2008) en cuanto a que, mientras los estudiantes buscan diferencias y similitudes, se ven en la necesidad de realizar cálculos que contribuyen a un propósito más amplio que el solo hecho de comparar los objetos matemáticos considerados. En particular, queremos explorar si los estudiantes hacen alguna mención a los significados o usos del signo de igual en las dos expresiones dadas, como criterio de comparación.

Cuadro 3.
Planilla entregada a los estudiantes para registrar sus observaciones

Diferencias	Similitudes	Planteos o comentarios extra

La parte (B) de la actividad propone que los estudiantes se focalicen específicamente en los significados del signo de igual involucrados en cada expresión, por si no lo han hecho en la parte anterior. Esta parte de la actividad adquiere especial utilidad en aquellos estudiantes que por iniciativa propia no hayan identificado el uso del signo de igual como una diferencia o como una similitud de las expresiones dadas, o bien en aquellos alumnos que lo hayan hecho pero de forma confusa o poco explícita.

Gestión de las dos sesiones de trabajo

Szydlik (2015) señala que la cultura matemática escolar se caracteriza por conversaciones y prácticas, aunque tradicionalmente se enfatiza esta última. Por ello la autora propone una clase que jerarquice la conversación entre docente y alumnos. Sugiere comenzar la clase con una pregunta que permita discutir y reflexionar sobre el uso de los símbolos, las representaciones o el lenguaje matemático. Ella señala que con esta metodología, los estudiantes pueden reconocer las fortalezas y las debilidades de sus propias interpretaciones, al tiempo que los profesores pueden conocer un poco más sobre la forma en que piensan sus estudiantes. Szydlik concluye que una práctica de indagación sostenida permitirá que las reglas matemáticas dejen de ser proporcionadas por el docente y que la comprensión matemática sea desarrollada por los estudiantes.

A la luz de las consideraciones metodológicas presentadas, acordamos que las sesiones de trabajo estuvieran mediadas por una práctica de indagación (Szydlik, 2015). Indagamos abiertamente a los estudiantes sobre los usos y los significados que le atribuyen al signo de igual en un contexto algebraico, limitándonos a escuchar, confrontar y cuestionar sus planteamientos. En otras palabras, jerarquizamos la conversación en clase de matemática, alejándonos del rol docente tradicional que se ocupa de validar e institucionalizar; en esta ocasión funcionamos más como un moderador, a fin de generar debates entre los propios estudiantes.

PRIMERA SESIÓN DE TRABAJO

En esta sesión se presentó la tarea de clasificación (Zaslavsky, 2008) mediada por una práctica de indagación (Szydlik, 2015). Los estudiantes se organizaron en seis equipos y dispusieron de veinte minutos para resolver la primera parte de la tarea. Transcurrido ese tiempo, solicitamos a cada equipo que entregara sus producciones escritas para evitar recorrecciones que pudieran generarse durante la puesta en común. Esto nos permitió recabar evidencias relativas a las impresiones inmediatas de los estudiantes sobre la tarea planteada. En la puesta en común, cada equipo fue presentando los criterios de clasificación que recordaba haber considerado, y que no habían sido planteados por otro equipo de forma previa. Agotada la discusión sobre estos criterios, se planteó oralmente la parte (B) de la tarea para discutir de forma colectiva.

Transcribimos y analizamos extractos que incluyen la intervención de alumnos que participaron en representación de sus respectivos equipos de trabajo, por lo que sus puntos de vista fueron compartidos por un mínimo de cuatro o cinco estudiantes. Las producciones escritas de los alumnos fueron consistentes con estas intervenciones. La diferencia radicó en que la puesta en común generó una instancia de profundización acerca de lo que sustentaba cada criterio de clasificación considerado. En otras palabras, se hizo explícito el pensamiento que subyacía en las intervenciones de los alumnos, lo que da cuenta de la potencialidad de las tareas y la metodología empleada. Expondremos a continuación los principales hallazgos a los que nos condujo esta instancia de trabajo con los alumnos.

Lado derecho como «resultado» de la ecuación

Martina es la primera alumna en participar durante la puesta en común de la primera sesión, para explicar los criterios de clasificación adoptados por su equipo al realizar la tarea correspondiente. Uno de ellos es el que plantea a continuación:

Martina: O sea, nosotros una parte de la tarjeta como que la reducíamos y después hacíamos la cuenta y verificábamos si el resultado era par o impar y listo, lo dividíamos en los grupos.
Profesor: Dígannos alguna tarjeta donde ustedes creen que el resultado es par.
Martina: F (en referencia a $2x + 15 - 9 = 31 - 9$).
Profesor: Por ejemplo la F, en donde el resultado cuál sería…
Alfonso: Complicada esa…, la D por ejemplo (en referencia a $16 = 7 + 9$).
Profesor: La D.
Alfonso: 22.
Martina: 22 es par.
Profesor: El 22 sería la F y por eso la pusieron dentro de las que tienen resultado par.
Equipo1:Sí.
Profesor: Bien, ¿alguna otra? Me dijeron la D, ¿cuál sería el resultado ahí?
Varios alumnos del equipo 1: 16.

Observamos que el criterio considerado por los integrantes de este equipo tiene que ver con la presencia de un valor numérico par o impar, a la izquierda o a la derecha del signo de igual, antes o después de reducir la expresión correspondiente. Por ejemplo, Martina sostiene que la expresión $2x + 15 - 9 = 31 - 9$ tiene resultado par porque después de reducir el segundo miembro se obtiene 22, que es un número par. Asimismo, Alfonso señala que la expresión $16 = 7 + 9$ es otro ejemplo de este subgrupo, debido a que el número 16 que figura en el primer miembro es par. Los estudiantes de este equipo son consultados sobre la posibilidad de identificar expresiones que, desde sus perspectivas, tengan «resultado impar». Martina, en representación de su equipo, prosigue con su intervención:

Martina: La A.
Profesor: La A: $11 + 6 = 17$ ¿otra?
Martina: La W (en referencia a $3x + 5 = 2x + x + 5$).
Profesor: W, ¿por qué esa les quedó con resultado impar?
Martina: Me confundí, espera, no veo nada.
Profesor: $3x + 5 = 2x + x + 5$.
Martina: Listo, esa no era impar. La Y es impar (en referencia a $2x + 15 = 31$).

Martina sigue ejemplificando de forma acorde al criterio empleado por su equipo. Sostiene que la expresión $2x + 15 = 31$ tiene resultado impar debido a que el número 31, que figura en el segundo miembro, es impar. Por el mismo motivo, señala que la expresión $11 + 6 = 17$ es otro ejemplo de este subgrupo. Martina y Alfonso hacen una aclaración respecto al criterio presentado:

Martina: Hay otro grupo que es el de los que no sabemos si es par o impar porque no sabemos el resultado.
Alfonso: $x = x$ no sabes si es par o impar.
Profesor: Ustedes tienen una categoría más en ese criterio…
Alfonso: Sí, son 5.
Profesor: ¿Qué otra?
Martina: La V.
Profesor: La V: $5 + x = 5 + x$, ¿ahí la explicación cuál sería?
Martina: O sea, como no sabemos qué número es x, no sabemos cuál es el resultado.

Martina y Alfonso, en representación de su equipo, señalan que existen cinco expresiones cuyo resultado no pueden clasificar como par o impar, debido a que desconocen el valor de la variable que interviene en cada una de ellas. Se trata de expresiones donde la variable aparece en ambos miembros, sean estas ecuaciones u operaciones con polinomios. El resto de la clase es consultada sobre el criterio presentado por este equipo:

Rodrigo: Para mí no es muy certero ese criterio porque en la ecuación no sabes bien cuál es el resultado, no puedes saber si el resultado es par o impar. (Discuten varios al unísono).
Profesor: Vamos a ver, de a uno, es interesante la discusión pero de a uno. Jaime.
Jaime: Estás haciendo un criterio de algo que no sabes… en este como que no sabes los resultados.
Profesor: Claro, pero ellos dicen que tienen un par de tarjetas que no saben dónde ponerlas…
Rodrigo: Pero cualquiera que tenga equis de los dos lados no vas a saber cuál poner, porque no sabes si el número es par o impar.

Rodrigo y Jaime sostienen que el criterio de «resultado par e impar» presentado por el equipo de Martina es impreciso, dado que en ciertos casos el «resultado» se desconoce y averiguarlo es muy costoso. Ambos estudiantes dejan entrever que la variable debe tomar un valor en particular en cada expresión, incluso cuando se trata de una operación con polinomios, con lo cual no están distinguiendo entre expresión de una equivalencia y expresión de una equivalencia condicional. Asimismo, estos alumnos, al igual que Martina y el resto de los integrantes de su equipo, sostienen que aun en el contexto de una ecuación el signo de igual está indicando un «resultado», lo que es propio de una visión operacional. Observamos que esta visión limitada del signo de igual, unida al uso de la palabra resultado y a su significado usual de operador en el contexto aritmético, representan un problema para los estudiantes, en tanto que obstaculizan la comprensión del concepto de solución de una ecuación. En particular, la asociación de la palabra resultado con todo lo que aparezca escrito al lado derecho del signo de igual.

Equivalencia simbólica y equivalencia condicional

Candelaria y Faustina también intervienen para exponer los criterios de clasificación considerados por su equipo. Uno de ellos es el que explican a continuación:

Candelaria: Pusimos los que x puede valer cualquier número y se sigue cumpliendo la igualdad, y los que tiene que ser un número específico.

Faustina: Eso es cuando tiene la misma cantidad de x de cada lado, entonces puede ser cualquier número porque tiene la misma cantidad de x. Y si ponle, tiene $2x$ de un lado y $3x$ de otro, capaz que tiene que ser uno específico, tienes que hacer la cuenta para saber qué número es.

Observamos que el criterio de clasificación introducido por este equipo hace referencia a la cantidad de valores de la variable que transforman cada expresión en una igualdad numérica: un valor en particular o cualquier valor. Asimismo Faustina, en representación de su equipo, plantea una condición para clasificar las expresiones de acuerdo con este criterio, relacionada con la cantidad de veces que interviene la variable en cada expresión. Esto genera una discusión que transcribimos parcialmente a continuación:

Jaime: Por ejemplo, en $x = x$ puede ser con cualquier número. Pero en cambio, en la I por ejemplo (en referencia a $2x + 1 = 17$), la x tiene que ser un número específico.
Profesor: ¿Y cómo nos damos cuenta en qué caso la x…? A ver allá, Gerónimo.
Gerónimo: Cuando la x está solamente de un lado, tiene que ser un valor específico […]. Suponte $2x + 1 = 17$, con esa x tienes que llegar a 17. Pero sin embargo, con equis de los dos lados, tú puedes hacer que la igualdad sea con el número que tú quieras…
Profesor: Interesante lo que dice Gerónimo… ¿Qué opinan los demás? (Varios hablan al unísono).
Juana: Que por ejemplo en O hay x de los dos lados (en referencia a $x + 3 = 3x + 5$) pero tiene que ser un número específico […]. Imagínate que x fuera 2, 2 más 3, 5, pero del otro lado no te da 5, porque 3 por 2 más 5…
Federica: No, porque en O de un lado es una sola equis y del otro lado son tres equis. O sea, no es la misma cantidad de equis de los dos lados...
Julieta: Pero Gerónimo nunca dijo que tenía que haber la misma cantidad de equis de los dos lados.

Jaime, en conformidad con el criterio presentado, propone una equivalencia simbólica y una ecuación para mostrar que en un caso la igualdad numérica se obtiene para cualquier valor de la variable, mientras que en el otro caso se obtiene para un valor en particular. Otros estudiantes discuten, al igual que Faustina, sobre las características que tienen las expresiones que se transforman en una igualdad numérica para cualquier valor de la variable. Mientras que Gerónimo plantea que x ha de aparecer a ambos lados del signo de igual, Federica advierte que debe aparecer a ambos lados pero la misma cantidad de veces. Lo que no reconocen estos estudiantes es que, frente a expresiones como $5x = 5x + 1$, se verifican las condiciones señaladas y sin embargo no tiene lugar una igualdad numérica para ningún valor de la variable.

Alfonso: Es imposible porque la equis el valor que tenga de un lado lo tiene que tener del otro. Si sumas 1 es imposible que sean iguales.
Profesor: ¿Entonces ahí para ti qué valor puede tomar x?
Alfonso: Cualquiera… No, no…, ninguno. (Varios hablan al unísono).
Rodrigo: Si tú pones, por ejemplo, 5 por 2, 10, y 5 por 2, más 1, 11. Siempre te da mal.
Profesor: Bueno, ¿entonces?...
Candelaria: No importa cuánto sea equis […] porque ponle que haces balanza, te queda…, sacas 5 de cada lado, te queda 0 y 1. O sea, no se va a cumplir la ecuación.

Alfonso asume que la variable debe tomar un solo valor cada vez, y eso le permite reconocer que la expresión $5x = 5x + 1$ no se transforma en una igualdad numérica para ningún valor de x. Asimismo, Rodrigo le asigna a la variable el valor 2 para mostrar, a modo de ejemplo, que en ese caso se obtiene un número distinto a cada lado del signo de igual, mientras que Candelaria intenta resolver la ecuación aludiendo al modelo de la balanza y llegando a que $0 = 1$, que no es verdadero. Observamos que la tarea de clasificación, y en particular su puesta en común, sirvió para que varios estudiantes lograran distinguir autónomamente entre el uso del signo de igual como expresión de una equivalencia condicional, propio de las ecuaciones, y el uso del signo de igual como expresión de una equivalencia simbólica, propio del contexto de las operaciones con polinomios.

SEGUNDA SESIÓN DE TRABAJO

En esta sesión se presentó la tarea que requiere comparar y contrastar (Zaslavsky, 2008). Los estudiantes trabajaron de forma individual y dispusieron de veinte minutos para resolver la primera parte. Tras entregar sus producciones, recibieron la segunda parte, que resolvieron y entregaron en otros diez minutos. Finalmente se realizó una puesta en común de toda la tarea, mediada por una práctica de indagación (Szydlik, 2015). En esta ocasión, también solicitamos a cada equipo que entregara sus producciones escritas para evitar recorrecciones que pudieran generarse durante la puesta en común. Como ya se ha señalado, esto nos permitió recabar evidencias de las impresiones inmediatas de los estudiantes sobre la tarea planteada. Los principales hallazgos a los que nos condujo esta instancia de trabajo con los alumnos son los que presentamos a continuación.

La condicionalidad como dificultad

Se vuelven a discutir las características que tiene una expresión que se transforma en una igualdad numérica para cualquier valor de x, como es el caso de $2x + 3x + 7 = 5x + 7$. Luego, se analiza la pertinencia de utilizar el signo de igual en una expresión cuya equivalencia es cierta para un solo valor de la variable como es el caso de $5x + 7 = 6x + 4$:

Profesor: El segundo signo de igual, ¿está bien puesto entonces? (en referencia a $5x + 7 = 6x + 4$).
Julieta: No, para mí no.

Varios al unísono: Sí.

Martina: O sea, 5 por 3 más 7 nos da 22, y 6 por 3 más 4 nos da 22. Pero si a equis lo usas con otro número, nos va a dar resultados diferentes de los dos lados, entonces ahí sí estaría mal puesto.
Julieta: No, no…
Nicole: En la A tengo para decir que de un lado del signo muestra lo mismo que del otro lado del signo (en referencia a $2x + 3x + 7 = 5x + 7$). Pero en la B es como para averiguar cuánto es equis (en referencia a $5x + 7 = 6x + 4$).
Julieta: Para mí no está bien usado, porque solo está bien usado con el número 3, entonces no está bien usado.

Nicole acepta el uso del signo de igual en la ecuación $5x + 7 = 6x + 4$, porque desde su perspectiva, es lo que permite obtener su solución. Martina también acepta el uso del signo de igual en ese contexto pero solamente al sustituir la variable por el número 3, que es la solución de la ecuación, considerando su uso inapropiado en cualquier otro caso. Julieta, en cambio, no acepta la presencia del signo de igual en la ecuación planteada, debido a que la equivalencia, en ese caso, es cierta para un solo valor de la variable. Observamos que las tres estudiantes hacen alusión a la condicionalidad que caracteriza la equivalencia dada por el signo de igual en el contexto de una ecuación, aunque ello las conduce a responder de distinto modo a la pregunta planteada. Otros estudiantes aportan a esta discusión:

Rodrigo: Si haces mal la ecuación, si tú la resuelves y te queda mal, el signo igual está mal porque no va a dar igual.
Profesor: Ajá… ¿Allá?

Federica: Para mí lo que dice Julieta está mal porque si tú estás usando el signo de igual como que tendría que ser lo mismo, entonces, de alguna manera lo tienes que resolver para que te dé lo mismo, y si estás usando el signo igual, es lo mismo.

Jaime: Claro, si está ahí, es para que encuentres la igualdad.

Martina: Tienes que encontrar un número para que cumpla la igualdad.

Jaime, Federica y Martina sostienen que el uso dado al signo de igual en una ecuación permite averiguar el valor de la variable que la transforma en una igualdad numérica: «Tienes que encontrar un número para que cumpla la igualdad». Observamos que estos estudiantes intervienen en el mismo sentido en que lo había hecho Nicole, pues asocian el significado del signo de igual en una ecuación a la necesidad de encontrar su solución. Rodrigo, en cambio, advierte que, en el contexto de una ecuación, el signo de igual está mal usado cuando se resuelve y se obtiene un valor que no la verifica: «si tú la resuelves y te queda mal, el signo igual está mal porque no va a dar igual». Esta apreciación de Rodrigo se acerca a la postura inicial de Martina, pues considera inapropiado el uso del signo de igual en una ecuación cuando la variable se sustituye por un valor que no pertenece a su conjunto solución. La discusión continúa:

Rodrigo: Ayer había una de estas en que la ecuación daba mal (en referencia a una de las expresiones planteadas en la primera sesión de trabajo). Ahí, está mal usado el signo de igual.

Jaime: No, en realidad, lo que está mal usado es el número que tú pones, porque el igual está para que tú encuentres la igualdad […]. Lo que está mal es el número, cómo la resolvió… (Varios hablan al unísono).

Observamos que la intervención de Rodrigo se acerca ahora al planteamiento de Julieta en tanto que no acepta el uso del signo de igual en el contexto de una ecuación. Asimismo, Jaime reitera que, en una ecuación, el signo de igual se utiliza para poder resolverla y encontrar su solución y que, en todo caso, lo incorrecto es no encontrar los valores que transforman la ecuación en una igualdad numérica. A partir del análisis realizado, constatamos que el entendimiento del uso del signo de igual, en el contexto de una ecuación, no está ligado solamente a una interpretación relacional del signo de igual (Knuth *et al.*, 2011), y que por tanto representa una dificultad que debe ser atendida, interpretada y explicitada junto a los estudiantes. Algunos de los alumnos que participaron en las sesiones de trabajo, por ejemplo, avalaron el uso del signo de igual cuando los dos miembros eran iguales para todos los valores de la variable, pero no así en el contexto de una ecuación. De este modo, la condicionalidad que caracteriza la equivalencia en el contexto de una ecuación representa un obstáculo a la hora de comprender el uso del signo de igual como expresión de una equivalencia condicional, y queda de manifiesto la necesidad de que los alumnos aprecien la variedad de usos distintos que admite este signo.

Uso del signo de igual: ¿diferencia o similitud?

Sobre el tramo final de esta sesión le preguntamos a los estudiantes, explícitamente, si el uso dado al signo de igual en las dos expresiones presentadas representaba una diferencia o una similitud. Una de las primeras respuestas que obtuvimos es la que mostramos a continuación:

Juana: Para mí es una diferencia […]. En la primera, por ejemplo, equis puede ser cualquier número y en la otra no, entonces para mí el igual en el primero es que puede ser cualquiera y en el segundo es que tiene que ser uno específico.

Juana considera que el signo de igual se utiliza de distinto modo en cada expresión, siendo entonces una diferencia. Mientras que en la primera expresión, aclara, la equivalencia es cierta para cualquier valor de la variable, en la segunda expresión lo es para un valor en particular. Observamos que la estudiante interpreta el signo de igual como expresión de una equivalencia simbólica y como expresión de una equivalencia condicional, asumiendo que se trata de dos usos distintos del signo de igual. Otros estudiantes también intervinieron:

Gerónimo: Para mí es una similitud, solo que en el caso A puedes hacerlo con cualquier número, mientras que en el B para que sea correcto se te reducen las posibilidades para… o sea, vale lo mismo.

Martina: Es una similitud, pero depende de qué y cómo lo pongas. (Varios discuten al mismo tiempo).

Jaime: En los dos lados el igual demuestra que hay una equivalencia o que los valores son iguales de los dos lados del igual. Para mí es una similitud.

Felipe: En la B yo a equis le pongo el valor que quiero, y si le pongo a equis el valor 3, ahí me da que es una similitud y está para que yo le ponga el valor que quiera para hallar la igualdad. Entonces es una similitud.

Estos estudiantes sostienen que el signo de igual se utiliza del mismo modo en ambas expresiones, siendo entonces una similitud. Para ellos, tiene que ver con que en ambos miembros se obtenga el mismo valor numérico. Sin embargo, en sus discursos dejan entrever que en un caso la equivalencia es cierta para cualquier valor de la variable mientras que en el otro lo es para un valor en particular: «en el caso A puedes hacerlo con cualquier número, mientras que en el B para que sea correcto se te reducen las posibilidades». Observamos que estos alumnos interpretan el signo de igual como expresión de una equivalencia condicional, pero no encuentran en esa condicionalidad un motivo suficiente como para distinguir este uso del que denominamos expresión de una equivalencia simbólica. Por lo dicho, constatamos la necesidad de que los alumnos aprecien que el signo de igual no tiene un único uso, siendo esta una implicación didáctica sobre la que volveremos en la siguiente sección.

CONCLUSIONES

Constatamos que la implementación de las tareas enfocadas en similitudes y diferencias, en particular las de clasificación y las que requieren comparar y contrastar (Zaslavsky, 2008), mediadas por una práctica de indagación (Szydlik, 2015), nos permitió abordar aspectos conceptuales relacionados con el signo de igual que contribuyeron a su comprensión. En este sentido, afloraron interpretaciones inesperadas como la de Julieta (sección la condicionalidad como dificultad, p. 62), quien considera que el signo de igual está mal utilizado cuando es empleado para escribir una ecuación. La dificultad observada no está relacionada con las transformaciones que aseguran la equivalencia entre ecuaciones, sino con la conceptualización misma del objeto ecuación, que está ligada al uso del signo de igual como expresión de una equivalencia condicional. También encontramos que el uso de la palabra *resultado* y sus significados habituales en el contexto aritmético (resultado de una operación, resultado de un problema) representaron un problema para algunos estudiantes como Martina y su equipo (sección lado derecho como «resultado» de la ecuación, p. 59) pues obstaculizaron la comprensión del concepto de solución de una ecuación. En particular, la asociación de la palabra resultado con todo lo que aparecía escrito en el lado derecho del signo de igual.

Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de atender específicamente la expresión condicional antes de introducir a los estudiantes en el trabajo con las ecuaciones. Por ejemplo, proponiendo el análisis de proposiciones matemáticas en base a tres categorías: siempre verdadera, a veces verdadera o nunca verdadera (Swan, 2008). En otro orden, sugerimos utilizar la palabra *solución* solamente para referirse a la raíz de una ecuación, evitando su uso para referirse al resultado de una operación o a la respuesta de un problema. Asimismo, sugerimos pensar una enseñanza a lo largo de la escolarización que enriquezca los usos del signo de igual desde etapas tempranas, para lo cual el tipo de tareas presentadas en este trabajo pueden resultar de utilidad.

En síntesis, las tareas utilizadas (Zaslavsky, 2008) y la metodología empleada (Szydlik, 2015) contribuyeron a que los estudiantes explicitaran sus puntos de vista sin inhibición y que discutieran con sus compañeros exponiendo sus ideas e intercambiando sus pareceres sobre los usos del signo de igual. Recomendamos utilizar las tareas de clasificación o de comparar y contrastar objetos matemáticos y jerarquizar la conversación entre los estudiantes del grupo pues permiten que el docente comprenda en profundidad el pensamiento de sus alumnos y pueda, de esta manera, tomar mejores decisiones acerca del rumbo de la enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). How children view equality sentences, Project for the Mathematical Development of Children. *ERIC Document Reproduction Services No. ED144802.*

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 77-98.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Difficulties areas in the acquisition of the arithmetic-algebraic language. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(2), 155-188.

Jacobs, V.R., Franke, M.L., Carpenter, T.P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, 38(3), 258-288.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
https://doi.org/10.1007/BF00311062

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 259-276). New York, NY: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Liebenberg, R., Linchevski, L., Olivier, A. y Sasman, M. (1998, July). Laying the foundation for algebra: Developing an understanding of structure. En *4th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*.

Linchevski, L. y Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, 30(1), 39-65.
https://doi.org/10.1007/BF00163752

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 33-46.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7 (1)), 341-368.

Parodi, S. (2016). *Significados del signo de igual en la entrada al algebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Berlin, Germany: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 191-228. https://doi.org/10.1007/BF01273663

Swan, M. (2008). Design of multiple representation tasks to foster conceptual development. Proceedings of the *11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11)*, México. Recuperado de: <http://tsg.icme11.org/document/get/289>.

Szydlik, J. (2015). Mathematical Conversations to Transform Algebra Class. *Mathematics Teacher*, 108(9), 656-661. https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.9.0656

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. Proceedings of the *11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11)*, México. Recuperado de: <ttp://tsg.icme11.org/document/get/290>.

Understanding of the equal sign at the entrance to algebra: task design and conversation in math class

Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet
Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com

Javier Lezama
CICATA. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
jlezamaipn@gmail.com

We present a study about the meanings attributed to the equal sign, in an algebraic context, by a group of students of secondary school (13-14 years old) in Uruguay. We focus on two work sessions we developed with the whole group.

For the first session we proposed a task that required classifying. We provided the students a set of 25 cards and we asked them to classify them according to all the criteria that they thought fit, working in small groups. Each card contained an expression in which the equal sign intervened in a first-degree equation with one unknown or in an operation with polynomials in one variable.

Each team of students recorded the classification criteria and the different categories established in each case, respecting the order in which they arose. Then a joint discussion was carried out to discuss the task carried out as well as to consider conceptual aspects of the mathematical objects involved.

For the second session we gave to the students a task that required to compare and to contrast two mathematical objects. We asked the students to make a list of the differences and similarities they can identify.

The objects that are selected must have some features in common but at the same time they must differ in other aspects. Tasks that require comparing mathematical objects encourage students to examine openly the presented objects and while looking for similarities and differences they perform calculations in order to explore the mathematical objects. We presented to students two expressions in an algebraic context: a first-degree equation with one unknown and an operation with polynomials in one variable. In particular, we wanted to explore whether students make any mention of the meanings or uses of the equals sign in the two given expressions, as a criterion of comparison.

The two sessions with the students were mediated by a practice of inquiry. We openly asked the students about the uses and meanings they attributed to the equal sign in each algebraic context, and we limited our role to listening, to promote discussions among students and to question their statements. In other words, we hierarchized the conversation in mathematics class and we moved away from the traditional teaching role without being concerned with validating and institutionalizing; on this occasion we assumed the role of a moderator in order to generate debates among the students.

The results show that tasks focused on similarities and differences, including those of classifying and those that need to compare and to contrast, mediated by a practice of inquiry, generated genuine discussions that rose the interest of students, which in turn allowed them to approach to conceptual aspects related to the equal sign that contributed to their understanding.